

Keha langemise (ühemõõtmeline) Maa gravitatsiooniväljas.

Eeldame et keha ripub liikumatult kõrgusel 10 m. Me peame arvutada järgmised keha parameetrid:

- 1). Kuidas keha koordinaat $x(t)$ ja kiirus $v(t)$ sõltuvad ajast (kuidas keha liigub Maa atmosfääris).
- 2). Kineetilise, potentsiaalse ja kogu energiad erinevates aja momentides.

Võtame arvesse kõik kehale mõjuvad jõud – gravitatsiooniline jõud , Archimedese jõud (tõstejõud) ja hõõrdumist (takistusjõud).

a) Gravitatsiooniline jõud (Kasutame klassikalisst Newtoni gravitatsiooniseadust).

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r} \quad , \text{ siin:}$$

$$G = 6.67408 \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \text{ -gravitatsiooni konstant,}$$

$$M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg - Maa mass,}$$

$R_M = 6378 \text{ km}$ - Maa raadius (keskmine väärtus). Kui h on trajektoori kõrgus, siis $\vec{r} = \vec{R}_M + \vec{h} = R_M + h$ (joonis 1):

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) = -m \cdot \left(G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) \right) = m \cdot \vec{g} \quad ,$$

siin g -raskuskiirendus, mille väärtus sõltub kõrgusest järgmiselt:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) \quad ,$$

või raskuskiirenduse absoluutne väärtus:

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^2} \quad .$$

Kui $h \ll R_M$ (Keha asub peaaegu Maa pinnal) siis: $g(h=0) = \frac{G \cdot M}{R_M^2} = 9.814 \text{ m/s}^2$ -gravitatsioonikiirendus Tallinna laiuskraadil.

b) Takistusjõud.

Kasutame hästi teatud valemit takistuse kirjeldamiseks:

$$\vec{F}_{tak} = -0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v} \quad \text{antud valemis:}$$

C – aerodünaamiline tegur (vt. tabelit),

ρ_{atm} – atmosfääri tihedus (üldiselt sõltub kõrgust h)

$\vec{v}$ – keha kiirus **õhu suhtes**,

S – keha ristlõike pindala

Shape	Drag Coefficient
Sphere	0.47
Halfsphere	0.42
Cone	0.50
Cube	1.05
Angled Cube	0.80
Long Cylinder	0.82
Short Cylinder	1.15
Streamlined Body	0.04
Streamlined Halfbody	0.09

Aerodünaamiline tegur

Measured Drag Coefficients

Atmosfääri tiheduse sõltuvuse kõrgust saab arvutada baromeetrilise valemiga:

$$\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g(h)}{R \cdot T} h}, \text{ siin:}$$

μ – gaasi ühe kilomooli mass,

ρ_0 – atmosfääri tihedus Maa pinnal

R – universaalne gaasi konstant $8314 \frac{J}{K \cdot kmool}$

T – atmosfääri temperatuur kelvinides

$g(h)$ – raskuse kiirendus

h – kõrgus

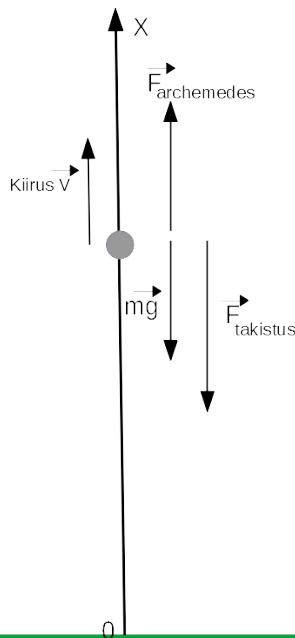
Arvatakse, et Maa atmosfääri piir on kõrgusel 100 km. See tähendab, et meie mudelis võime eeldada, et gravitatsiooni kiirendus peaaegu ei sõltu kõrgusest sellepärast et Maa pinnal ja kõrgusel 100 km on kiirendus peaaegu sama. Tõestame seda: $\frac{g(h)}{g(h=0)} = \left(1 + \frac{h}{R_{Maa}}\right)^2$ Kui keha trajektoori maksimaalne kõrgus on 100 km siis seda suhe võrdub 1.02. Raskusekiirendused on peaaegu võrdsed, erinevus on ainult 2% ja seda saab ignoreerida.

c) Archimedesese jõud.

Archimedesese jõud alati suunatud raskuskiirenduse vastu ja arvutatakse järgmise valemiga:

$$|\vec{F}_{arch}| = \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha} \text{ siin:}$$

V_{keha} – keha rumala, $g(h)$ – raskuse kiirendus, $\rho_{atm}(h)$ – atmosfääri tihedus kõrgusel h .



Nüüd arvutame keha koordinaati ja kiiruse sõltuvuste ajast. Selle jaoks on vaja integreerida differentsiaal võrrandi (või differentsiaal võrrandite süsteemi) või Newtoni teise seaduse (joonis 2).

$$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{tak} + \vec{F}_{arch}$$

On mugavam kasutada vektorite asemel nende projektsioonid. Projitseerime kõik vektorid x-telje ja arvestame et takistusjõud ja kiiruse vektor on alati vastas. Kui koordinaadi telg X ja nulli punkt on valitud nagu joonisel siis (joonis 2):

$$m \ddot{x} = -m \cdot g - 0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v + \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}$$

Jagame seda võrrandi keha massiga siis saame:

$$\ddot{x} = -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}}{m}$$

Nüüd määrame mõned vajalikud mudeli parameetrid (eeldame et keha liigub Maa pinna lähedal

$h \ll R_{Maa}$):

$g=9.814$ ja ei sõltu kõrgusest,

$r_{keha}=1.8$ m keha on pall raadiusega 180 cm (näiteks see on meteoroloogiline sond),

$C=0.47$ palli jaoks 0.47 (https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient),

$m=5$ kg palli mass on 5kg

$g=9,814$ m/s² - raskuse kiirendus. Kui keha trajektoori kõrgus $\gg$ kui Maa radius siis g ei sõltu kõrgust.

$$\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g(h)}{R \cdot T} \cdot h} \quad \text{siin} \quad \begin{aligned} \mu &= 29 \text{ kg/kmool} \\ R &= 8314 \text{ J/(kmool} \cdot \text{K)} \\ T &= 293 \text{ K} \end{aligned}$$

Tekib küsimus, kuidas arvutada atmosfääri tihedust Maa pinnal $\rho_{atm}(h=0)=\rho_0$. Selle jaoks saab kasutada ideaalse gaasi olekuvõrrandi (Mendelejev-Klaiperon seadus):

$$PV_{gaas} = \frac{m_{gaas}}{\mu_{gaas}} RT \quad \text{avaldatakse tihedust} \quad \rho_0 = \frac{m_{gaas}}{V_{gaas}} = \frac{P \cdot \mu_{gaas}}{R \cdot T}, \text{ siin } P - \text{gaasirõhk Maa pinnal.}$$

Me kasutame järgmised parameetrite väärtused: $P=100000$ Pa, $T=300$ K. Eeldame et atmosfäär on isothermiline (atmosfääri temperatuur ei sõltu kõrgusest aga tegelikult see ei ole nii:

https://en.wikipedia.org/wiki/U.S._Standard_Atmosphere

Nüüd me peame integreerima järgmist differententsiaaal võrrandi:

$$\ddot{x} = -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g \cdot V_{keha}}{m}$$

Klassikalises mehaanikas on teada et keha koordinaat $\mathbf{x}$, kiirus $\mathbf{v}$ ja kiirendus $\mathbf{a}$ on seotud järgmist:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}}.$$

(Esimine variant) Antud diffvõrrandi integreerimiseks kasutame natuke **modifitseeritud Euleri algorütm**. Keha koordinaadi väärtus järgmisel aja hetkel $x(t+\Delta t)$ arvutatakse siis nii $x(t+\Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + a(t)\Delta t^2/2$. Siin $x(t), v(t)$ ja $a(t)$ on keha koordinaat, kiirus ja kiirendus eelmisel ajahetkel t :

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t + \frac{a(t) \cdot \Delta t^2}{2}$$

ja kiiruse

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t$$

siin Δt on integreerimise ajasamm.

Selge et antud algorimi kasutamiseks me peame teada koordinaadi ja kiiruse väärtuste alg ajahetkel $x(0)$ ja $v(0)$ aga kiirenduse arvutame üleval valemiga.

(Teine variant) Integreerimiseks kasutame standartse Matlabi alamprogrammi **ode45**. Antud programmis realiseeritud Runge-Kutta meetod järguga 4-5.

Nüüd proovime realiseerida seda planni Matlabi koodis. Vajalike programmid leiame kataloogis Matlab.

Alguses on väike seletus. Diferentsiaalvõrrand mille me peame integreerima välja näeb nii:

$$\ddot{x} = -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g \cdot V_{keha}}{m}, \text{ see on esimest järku diffvõrrand aga}$$

alamprogrammiga saab integreerida alles esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi. Meie puhul kasutame kahte parameetrit mille väärtused arvutatakse, see on keha koordinaat "x" ja kiirus "v=v_x". Iga parameetrile kirjutame eraldi esimest järku diferentsiaal võrrandi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g \cdot V_{keha}}{m} \end{aligned} .$$

Siis nüüd me peame arvutada kaks parameetrit (x ja v_x) mille kirjeldavad keha liikumist.

Ülesanded:

1. Alguses asub pall maapinnal. Algkiirus on 0.

a) Mis kõrguseni ta tõuseb?

NB! keha on pall, mis kaalub 1 kg ja raadiusega 1,8 m.

2. Alguses pall asub liikumatult kõrgusel 10 km.

a) Mis kiirusega ja kiirendusega ta kukub Maapinnale (Palli lõppkiirus ja lõppkiirendus)?

NB! keha on pall, mis kaalub 10 kg ja raadiusega 10 cm.

3. Pall viisatud ülesse algkiirusega 10 m/s. Mis kõrguseni ta tõuseb Veenusel ja Marsil?

NB! keha on pall, mis kaalub 10 kg ja raadiusega 10 cm.