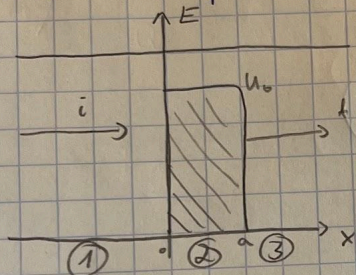


5

2.

2. Tunneli efekt $E > U_0$



Pidevane tingimused:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \\ \psi_2'(a) = \psi_3'(a) \end{cases}$$

Schrödingeri võrrandid

$$\textcircled{1} \quad \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} = E \psi_1$$

$$\Rightarrow \psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

mis see on?

$$\textcircled{2} \quad \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + U_0 \psi_2 = E \psi_2 \Rightarrow \psi_2(x) = C e^{k_2 x} + D e^{-k_2 x}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} = E \psi_3$$

$$\Rightarrow \psi_3(x) = F e^{ik_3 x} + G e^{-ik_3 x}$$

$$k_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Kus on miinusmärgiga funktsioon?

12. Interferents tekib siis, kui kaks või enam lainefunktsiooni kattuvad ja liituvad.

Kvantmehaanikas kirjeldatakse osakesi lainefunktsioonide kaudu ning seetõttu omavad need osakese laineomadusi, mis võimaldab neil tekitada interferentsi.

Kvantmehaanikas peavad lainefunktsioonid täitma erinevaid piirtingimusi, mis kokkuvõttes viivad energia diskreetsuseni (valemi tulemus pildina). Energia diskreetsus tähendab, et lainefunktsioon sellistes süsteemides saab võtta ainult teatud kvantiseeritud kuju. Klassikalises mehaanikas võib osake võtta mistahes energiaväärtus vahemikust $0 < E < U$. Kvantmehaanikas osake ei saa olla suvalise energiaga, vaid võib omada ainult teatud kindla väärtusega energiad. Seega on osakese energia potentsiaalaugus diskreetne. Energiatasemete diskreetsus viib selleni, et lainefunktsioonidel on spetsiifilised lainepikkused, ja interferentsimustrid sõltuvad neist diskreetsetest lainepikkustest. Kvantmehaanikas saab tekkida interferents lainefunktsiooni laineomaduste tõttu.

12

Olgu pot. energia lüüsi

$$U = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ U_0, & x < 0, x > a \end{cases}$$

$$E < U_0$$

Oletame, et $U_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \psi_{II} = \psi_{III} = 0$ Vaatlen Schrödingeri võrandi lahendit
ainult potentsiaalvabas, kus $U=0$ Ehk tegu on vaba osake Schrödingeri
võrandiga

$$\psi_1(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \text{ kus}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Rahendame ääretingimusi:

$$\psi_1(0) = \psi_1(a) = 0$$

Saame võrandi

$$A + B = 0, \quad A e^{ika} + B e^{-ika} = 0$$

$$A(e^{ika} - e^{-ika}) = 2iA \sin(ka) = 0$$

$A \neq 0$, sonst müsste $\varphi_1 = 0$ sein, ~~sonst~~ ^{ja} müsste
andere Bedingung in 0 , was meine
Zähl n oben

$$\begin{aligned} \text{Sei } \sin(ka) &= 0 \\ ka &= n\pi, n=1,2,3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sin(ka) &= 0 \\ ka &= n\pi \end{aligned}} \right\} \text{energie diskret}$$

$n \neq 0$, sonst müsste $k=0$ sein, $\varphi_1 = 0$

$$E_n = \frac{k^2 \hbar^2}{2M} = \frac{(\pi \hbar)^2}{2Ma^2} n^2, n=1,2$$

15.

$$\tan\left(a\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right) = \frac{2\sqrt{E(U_0 - E)}}{2E - U_0}$$

$$\text{Olgu } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

$$\text{Siis } \tan(ka) = \frac{2k\kappa}{k^2 - \kappa^2}$$

$$\text{Pärit } U_0 \rightarrow \infty, \text{ siis } \kappa \rightarrow \infty, \text{ kuna}$$

$$\kappa^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$$

$$\frac{2k\kappa}{k^2 - \kappa^2} \approx \frac{2k\kappa}{-\kappa^2} = -\frac{2k}{\kappa} \rightarrow 0, \text{ kuna}$$

$$\kappa \rightarrow \infty$$

$$\text{Seega } \tan(ka) \rightarrow 0 \Rightarrow ka = n\pi,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

~~Siis~~

$$k = \frac{n\pi}{a} = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Täpselt sama tulemus, mis
infinite potential well korral

15.

20.

20

$$U_{\text{pot}} = \frac{kx^2}{2}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

amplitude

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\dot{x}(t) = -A \omega \sin(\omega t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{2}$$

$$= \frac{m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{2}$$

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2T} \int_0^T m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T m A^2 \omega^2 (1 - \cos(2\omega t)) dt$$

$$= \frac{1}{2T} \int_0^T m A^2 \omega^2 dt = \frac{1}{2T} m A^2 \omega^2 T = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

$$= \left[\frac{1}{m} \omega^2 \right] = \frac{1}{2} k A^2$$

U_{pot}

$$U_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t)$$

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k A^2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{4} k A^2 T = \frac{1}{4} k A^2$$

Time averaging:

$$\langle U \rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) \frac{M \omega^2 x^2}{2} \psi_n(x) dx = \frac{M \omega^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{dU}{dx} (x_{n+1}) \equiv \frac{E_n}{2}$$

$$\hat{H} = \hat{T} + V \Rightarrow \langle T \rangle_n = \frac{E_n}{2}$$

$$\langle H \rangle = E_n$$

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} = \frac{p^2}{2M}$$

$$\Rightarrow \langle T \rangle_n = \frac{1}{2M} \langle p^2 \rangle_n = \frac{E_n}{2}$$

$$\langle p^2 \rangle_n = M E_n = \frac{M \hbar \omega}{2} (n + \frac{1}{2})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) x^2 \psi_m(x) dx = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} A_n A_m \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) \xi^2 H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= \sqrt{\pi} e^{-\frac{2\omega}{\hbar} \left[\frac{1}{k} + (n+1)x \right]^2} = \sqrt{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} n! (n+2)!}{n!} \right\} d\xi =$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} n! n! (2n+1)!}{n!} \left\{ \right.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n! m!}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \left(\sqrt{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} 2^{n+1} n! (n+2)! \quad m=n \\ & \sqrt{\pi} \frac{2^{n+1} n!}{n!} \quad m=n-2 \\ & 0, \text{ muidal} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n x^2 \psi_m dx = \begin{cases} \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) & m=n \\ \frac{\hbar}{2m\omega} \sqrt{(n+1)(n+2)} & m=n+2 \\ 0 & m=n-2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\hbar}{2m\omega} \sqrt{n(n-1)} \quad m=n-2 \\ & 0 \quad m=n-1 \end{aligned} \right.$$

Classical

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad E_{\text{total}} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

$$A^2 = \frac{2 E_{\text{total}}}{m \omega^2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m \omega} \left(2n+1 \right)$$

Põhinõu
samas
mugun