100

1 küsimus 3 20

Olgu potentsiaalibarjäär järgmine:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Klassikalises füüsikas sõltub osakese liikumine selle energia E suhtest barjääri kõrgusega V_0:

- Kui $E > V_0$, siis osake suudab barjäärist üle minna. Seega:

$$T(E) = 1, \quad R(E) = 0$$

- Kui $E < V_0$, siis osake ei suuda barjäärist üle minna ja peegeldub täielikult:

$$T(E) = 0, \quad R(E) = 1$$

Tunneliefekt kvantmehaanikas

Kvantmehaanikas osakese lainefunktsioon võimaldab tal ”tungida”potentsiaalibarjääri sisse ka siis, kui $E < V_0$. Selle tulemusel on võimalik mitt-null läbitõenäosus $T(E) > 0$, kuigi klassikaline mehaanika seda ei võimalda. Seda nähtust nimetatakse **tunneliefektiks**.
Kvantmehaaniline läbitõenäosus (ligikaudselt) kujul $E < V_0$:

$$T(E) \approx e^{-2\kappa a}, \quad \text{kus} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

See näitab tõenäosust, et läbib barjääri eksponentsiaalselt väheneb, kui barjäär on kõrgem või laiem.

2 Küsimus 13 20

Vaatleme osakest lõpmatu potentsiaalikastiga, mille pikkus on L. Osakese lainefunktsioon seisulaine korral on:

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-iE_n t/\hbar}$$

kus $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ on energia tasemed.

Tõenäosusvoolu tihedus j

Tõenäosusvoolu tihedus j ühe dimensiooni korral on määratud järgmiselt:

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)$$

Asendame seisulaine $\psi_n(x,t)$ avaldise:

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{-iE_1t/\hbar}$$

Võtame tuletised:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{-iE_1t/\hbar}$$

$$\psi^*(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{iE_1t/\hbar}$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial x} = \sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{iE_1t/\hbar}$$

Asendades avaldisse:

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left[\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{iE_1t/\hbar}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{-iE_1t/\hbar}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{-iE_1t/\hbar}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{iE_1t/\hbar}\right)\right]$$

Eksponentsid taanduvad:

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\cdot\frac{2}{L}\cdot\frac{\pi}{L}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) = 0$$

Tulemus

$$j = 0$$

3 Küsimus 15

20

Antud võrrand lõpliku sügavusega sümmeetrilisele potentsiaalikaevule on:

$$\tan\left(a\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right) = \frac{2\sqrt{E(U_0 - E)}}{2E - U_0}$$

Olgu:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

Siis on:

$$\tan(ka) = \frac{2k\kappa}{k^2 - \kappa^2}$$

Piir üleminekul $U_0 \to \infty$

Kui $U_0 \to \infty$, siis ka $\kappa \to \infty$, kuna $\kappa^2 = \frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}$. Vaatleme võrrandi paremat poolt:

$$\frac{2k\kappa}{k^2 - \kappa^2} \approx \frac{2k\kappa}{-\kappa^2} = -\frac{2k}{\kappa} \to 0 \quad \text{kuna} \quad \kappa \to \infty$$

Seega:

$$\tan(ka) \to 0 \quad \Rightarrow \quad ka = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Lahendame energia E:

$$k = \frac{n\pi}{a} = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$$

Tulemus

See on täpselt see tulemus, mida saame lõpmatu sügavusega potentsiaalikaevu korral:

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

4 Küsimus 23

20

Vaatleme ühe dimensiooni kvantmehaanilist harmoonilist ostsillaatorit. Lainefunktsioonid on tuntud Hermite'i polünoomidega:

$$\psi_n(x) = N_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}, \quad \text{kui } \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

Kus N_n on normeerimisfaktor.

Ootuse väärtus $\langle x^2 \rangle$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\, x^2\, \psi_n(x)\, dx$$

Sellele on teada lahendus tabelkujul:

$$\langle x^2 \rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega}$$

Võrdlus klassikalise tulemusega

Klassikalises mehaanikas võngub osake potentsiaaliväljas $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Energia on:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Klassikalise osakese ruutkoordinaadi aja- või faasi-keskmine:

$$\langle x^2 \rangle_{\text{klass}} = \frac{1}{2}A^2 = \frac{E}{m\omega^2}$$

Kvantmehaanikas:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \Rightarrow \quad \langle x^2 \rangle = \frac{E_n}{m\omega^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega}$$

5 Küsimus 31

20

Antud on dispersiooniseos:

$$\omega(q) = \omega_0 \cdot \left|\sin\left(\frac{qa}{2}\right)\right|$$

1. näitan, et $\omega(q + \frac{2\pi}{a}) = \omega(q)$

$$\omega(q + \frac{2\pi}{a}) = \omega_0 \cdot \left|\sin\left(\frac{(q + \frac{2\pi}{a})a}{2}\right)\right| = \omega_0 \cdot \left|\sin\left(\frac{qa}{2} + \pi\right)\right|$$

$$= \omega_0 \cdot \left|-\sin\left(\frac{qa}{2}\right)\right| = \omega_0 \cdot \left|\sin\left(\frac{qa}{2}\right)\right| = \omega(q)$$

Seega $\omega(q)$ on perioodiline perioodiga $\frac{2\pi}{a}$.

2. näitan, et $u_{k,q}(t) = u_{k,q+\frac{2\pi}{a}}(t)$

Lainekuju on:

$$u_{k,q}(t) = A_q \cdot e^{i(\omega(q)t + qak)}$$

Asendades $q \to q + \frac{2\pi}{a}$:

$$u_{k,q+\frac{2\pi}{a}}(t) = A_{q+\frac{2\pi}{a}} \cdot e^{i(\omega(q)t + (q+\frac{2\pi}{a})ak)} = A_{q+\frac{2\pi}{a}} \cdot e^{i(\omega(q)t + qak + 2\pi k)}$$

Kuna $e^{i2\pi k} = 1$ iga täisarvu k korral:

$$u_{k,q+\frac{2\pi}{a}}(t) = A_{q+\frac{2\pi}{a}} \cdot e^{i(\omega(q)t + qak)} = A_{q+\frac{2\pi}{a}} \cdot u_{k,q}(t)$$

3. Järeldus

Kui amplituud $A_{q+\frac{2\pi}{a}} = A_q$, siis:

$$u_{k,q+\frac{2\pi}{a}}(t) = u_{k,q}(t)$$

Seega lainekujud on samad ja q-vektor on defineeritud ainult mooduli $\frac{2\pi}{a}$ võrra — see peegeldab lainevektori perioodsust kristallivõres.