

8. Can you show that the average value for some physical quantity A (measurable value for given quantity) i.e. $\langle A \rangle$ does not depend on time for stationary solution of full Schrodinger equation $i\hbar \partial \psi / \partial t = \hat{H} \psi$? 20

Handwritten solution for problem 8:

$$\langle A \rangle(t) = \int \psi^*(x,t) \hat{A} \psi(x,t) dx \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

Stationary states: $\psi(x,t) = \varphi(x) e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \quad \hat{H} \varphi = E \varphi$

$$\psi(x,t) = \varphi(x) e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \Rightarrow \langle A \rangle(t)$$

$$\psi^*(x,t) = \varphi^*(x) e^{i \frac{Et}{\hbar}}$$

$$\langle A \rangle(t) = \int \varphi^*(x) e^{i \frac{Et}{\hbar}} \hat{A} \varphi(x) e^{-i \frac{Et}{\hbar}} dx = \int \varphi^*(x) \hat{A} \varphi(x) dx = \text{const}$$

$\langle A \rangle(t) = \langle A \rangle$ ei sõltu ajast

12. Why in quantum mechanics should we use Hermitian operators to solve the eigenvalue problem? Definition of Hermite operators. Show that eigenfunctions of Hermitian operators form the set of orthonormal functions. 20

Operaatorit, mille korral $\hat{B} = \hat{A}^*$ ehk kaasoperaator on võrdne selle operaatori endaga, nimetatakse enesekaasseks ehk hermiitiliseks operaatoriks.

$$\langle \psi | \hat{A} \varphi \rangle = \int \psi^* \hat{A} \varphi dV = \int (\hat{A} \psi)^* \varphi dV = \langle \hat{A} \psi | \varphi \rangle$$

Kvantmehaanikas füüsikaliste suuruste (nt energia, impulss, koordinaat) mõõdetavad väärtused on reaalarvud. Kui mingi suuruse operaator $\hat{A}$ esindab mõõdetavat väärtust, siis selle omafunktsioonide vastavad omaväärtused peaksid olema reaalsed, sest füüsikalisi mõõtmistulemusi väljendatakse reaalarvudena. Kui operaator on hermiitiline, siis tema omaväärtused on reaalarvud tema omavektorid moodustavad ortogonaalse baasi, mis on oluline lainefunktsioonide esitlemisel.

Olgu $m \neq n$, siis sel juhul $a_n - a_m^* \neq 0$ ja järelikult $\int \varphi_m^* \varphi_n dV = 0$, mis tähendab, et erinevatele omaväärtustele vastavad omafunktsioonid on ortogonaalsed (nende

skalaarkorrutis on võrdne nulliga). Kuna me võime kõik omafunktsioonid φ_n normeerida ühele $\int \varphi_m^* \varphi_n dV = 1$, siis saamegi, et hermiitilise operaatori omafunktsioonid moodustavad ortonormeeritud süsteemi $\int \varphi_m^* \varphi_n dV = \delta_{mn}$.

20. Is it possible to calculate the exact value of the coordinate of a particle in states with quantum number $n=1$? Why? What about the average value of coordinate x , is it possible to be calculated? (NB! The motion is one-dimensional periodic and free).

Ei, me ei saa leida osakese täpset koordinaati x , sest kvantmehaanikas ei ole osakesel täpset asukohta nii, nagu klassikalises füüsikas. Tema olekut kirjeldab lainefunktsioon, mille abil saame määrata tõenäosuse, et osake asub mingis vahemikus $[x, \Delta x]$, aga mitte ühte kindlat koordinaati. Olgugi, et täpset asukohta arvutada ei saa, saame leida tema keskmise asukoha:

$$\langle x \rangle = \int \psi^*(x) x \psi(x) dx$$

15

27. Operators are commute : a.) p^x and p^y ? b.) p^2 and p^y ?

20

Operatorite kommutatsioon: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$

1) $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ $\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = \hat{p}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{p}_x =$$

$$= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$ Järe, $\hat{p}_x$ ja $\hat{p}_y$ on kommutatsioonid.

2) $[\hat{p}_x^2, \hat{p}_y] = \hat{p}_x^2 \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{p}_x^2 = (*)$

$$\hat{p}_x^2 = (-i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$(*) = \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) =$$

$$= i\hbar^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = i\hbar^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, y) \right) \Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y} \right] = 0$$

Järe, $\hat{p}_x^2$ ja $\hat{p}_y$ on kommutatsioonid.

35. Proof that for transmission coefficient $\lim_{E \rightarrow +\infty} T(x)=1$

20

Mul on tunne, et küsimuses on viga, sest kui T sõltub x -ist, siis peaks olema $x \rightarrow \infty$. Et küsitud on $E \rightarrow \infty$, siis lähenesin nii, et võtsin ka T sõltuma E -st.

$$\begin{aligned} \text{7} \quad \lim_{E \rightarrow \infty} T(E) ? \quad T(E) &= \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \\ \lim_{E \rightarrow \infty} T(E) &\approx \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{E}\sqrt{E - V_0}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0})^2} = \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{4E\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}{E\left(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}\right)^2} = \\ &= \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}\right)^2} = \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 1}{(1 + 1)^2} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$