

6. Zeeman effect. Derive a correction of energy and wavefunction.

20

Meil on süsteem olekus $|n j m_j\rangle$, kus kvantarvud

a) j – kogumoment (orbitaal + spin)

b) m_j – selle projektsioon z -teljel.

Magnetväli on homogeenne ja suunatud z -teljele:

$$\vec{B} = (0, 0, B)$$

Hamiltoni mittestatsionaarne osa:

$$\hat{H}' = \frac{e}{2M} \vec{B} \cdot (\hat{L} + 2\hat{s}) = \frac{eB}{2M} (\hat{L}_z + 2\hat{s}_z)$$

Olgu $\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}$.

Tahame $\hat{L}_z + 2\hat{s}_z$ avaldada läbi $\hat{J}_z$.

Oletame, et leidub operaator $\hat{G}$, mis rahuldab

$$\hat{G}\hat{J}_z = \hat{L}_z + 2\hat{s}_z$$

Miks 2 Sz ?

Seega:

$$\hat{H}' = \frac{eB}{2M} \hat{G}\hat{J}_z$$

On vaja leida Landé tegur g , mis rahuldab

$$\hat{L}_z + 2\hat{s}_z = g\hat{J}_z$$

Millest järeldeb:

$$\hat{H}' = \frac{eB}{2M} g\hat{J}_z$$

Kuna $\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}$, siis $\vec{s} = \vec{J} - \vec{L}$.

$$\vec{s} \cdot \vec{J} = \vec{s} \cdot (\vec{L} + \vec{s}) = \vec{s} \cdot \vec{L} + s^2$$

$$\vec{J} \cdot \vec{s} = \vec{L} \cdot \vec{s} + s^2$$

$$\vec{L} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - s^2)$$

$$\langle \hat{L}_z + 2\hat{s}_z \rangle = g\langle \hat{J}_z \rangle = g\hbar m_j$$

$$\Delta\varepsilon = \langle njm_j | \hat{H}' | njm_j \rangle = \frac{eB}{2M} g \langle \hat{J}_z \rangle$$

Kuna:

$$\hat{J}_z | njm_j \rangle = \hbar m_j | njm_j \rangle$$

siis lõpuks:

$$\Delta\varepsilon = \frac{e\hbar B}{2M} \cdot g \cdot m_j$$

Lähtume sellest, et meil on süsteemi olek $| njm_j \rangle$, kus j on kogumoment (orbitaalmoment l + spin s) ning m_j on selle projektsioon z -teljel. Kasutame ajast sõltumatut esimest järku häiritusteooriat. Vastav lainefunktsiooni korrigeerimine on üldiselt kujul

$$\psi_{njm_j}^{(1)} = \sum_{k \neq n} \frac{\langle kj'm'_j | \hat{H}' | njm_j \rangle}{E_{nj}^{(0)} - E_{kj'}^{(0)}} | kj'm'_j \rangle.$$

Zeeman-efekti korral on häiritud Hamiltoni osa

$$\hat{H}' = \frac{eB}{2M} (\hat{L}_z + 2\hat{s}_z),$$

kus $\vec{B} = B\hat{z}$ on homogeenne magnetväli z -telje suunas. Operaatorid $\hat{L}_z$ ja $\hat{s}_z$ võivad muuta ainult m_j väärtust, jättes l , s ja j enamasti samaks. Seetõttu mõjutavad lainefunktsiooni korrigeerimise ainult need kõrvalolekud, millel on sama l , s , j , kuid erinev m'_j .



Täpsemalt on korrigeerimine järgmine:

$$\psi_{njm_j}^{(1)} = \sum_{\substack{k \neq n \\ j', m'_j}} \frac{\langle kj'm'_j | \frac{eB}{2M} (\hat{L}_z + 2\hat{s}_z) | njm_j \rangle}{E_{nj}^{(0)} - E_{kj'}^{(0)}} | kj'm'_j \rangle.$$

See väljendab, et välise magnetvälja tõttu saavad $| njm_j \rangle$ olekusse „sisse segatud“ muud sobivad kõrvalolekud, kus Hamiltoni häiringu mitte-diagonaalsed elemendid on mitternullilised.

9. 9.1: Probability of interlevel transitions for first order of perturbation theory approximation. 9.2: The case of harmonic external perturbation. 9.3: The "golden rule" of quantum mechanics. 9.4: Relationship between the "golden rule" and spectroscopy.

9.1

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}'(t)$$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_k c_k(t) e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle$$

$$\dot{c}_m(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_j c_j(t) e^{i\omega_{mj}t} \langle m | \hat{H}'(t) | j \rangle$$

$$c_j(t) \approx \delta_{jn}$$

$$\dot{c}_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} e^{i\omega_{mn}t} \langle m | \hat{H}'(t) | n \rangle$$

$$c_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle m | \hat{H}'(t') | n \rangle e^{i\omega_{mn}t'} dt'$$

$$P_{n \rightarrow m}(t) = |c_m^{(1)}(t)|^2$$

$$P_{n \rightarrow m}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t \langle m | \hat{H}'(t') | n \rangle e^{i\omega_{mn}t'} dt' \right|^2$$

Mida see kõik tähendab?

9.2

$$\hat{H}'(t) = \hat{W} e^{-i\omega t} + \hat{W}^\dagger e^{i\omega t}$$

$$c_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[\langle m | \hat{W} | n \rangle \int_0^t e^{i(\omega_{mn} - \omega)t'} dt' + \langle m | \hat{W}^\dagger | n \rangle \int_0^t e^{i(\omega_{mn} + \omega)t'} dt' \right]$$

$$\int_0^t e^{i\alpha t'} dt' = \frac{e^{i\alpha t} - 1}{i\alpha}$$

$$\frac{e^{i\alpha t} - 1}{i\alpha} = e^{i\alpha t/2} \frac{2 \sin(\alpha t/2)}{\alpha}$$

$$P_{n \rightarrow m}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \frac{\langle m | \hat{W} | n \rangle}{\omega_{mn} - \omega} \sin \left(\frac{(\omega_{mn} - \omega)t}{2} \right) + \frac{\langle m | \hat{W}^\dagger | n \rangle}{\omega_{mn} + \omega} \sin \left(\frac{(\omega_{mn} + \omega)t}{2} \right) \right|^2$$

9.3

$$c_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle m | \hat{H}'(t') | n \rangle e^{i\omega_{mn}t'} dt'$$

$$\hat{H}'(t) = \hat{V} e^{-i\omega t} + \hat{V}^\dagger e^{i\omega t}$$

$$c_m^{(1)}(t) \approx \frac{1}{i\hbar} \langle m | \hat{V} | n \rangle \int_0^t e^{i(\omega_{mn} - \omega)t'} dt'$$

$$c_m^{(1)}(t) = \frac{\langle m | \hat{V} | n \rangle}{\hbar} \cdot \frac{e^{i(\omega_{mn} - \omega)t/2} \cdot 2i \sin[(\omega_{mn} - \omega)t/2]}{(\omega_{mn} - \omega)}$$

$$P_{n \rightarrow m}(t) = |c_m^{(1)}(t)|^2 = \frac{|\langle m | \hat{V} | n \rangle|^2}{\hbar^2} \cdot \frac{\sin^2[(\omega_{mn} - \omega)t/2]}{(\omega_{mn} - \omega)^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(xt/2)}{\pi x^2 t/2} = \delta(x)$$

$$\frac{dP_{n \rightarrow m}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | \hat{V} | n \rangle|^2 \delta(E_m - E_n - \hbar\omega)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | \hat{V} | n \rangle|^2 \rho(E)$$

9.4 Fermi kuldreegel seob üleminekumäära kvantolekutevahelise maatrikselemendi ruuduga ning energianivoo tihedusega. Spektroskoopias määrab see, millised sagedused vastavad lubatud üleminekutele ning kui intensiivsed on vastavad spektraaljooned.

5

16. What is the point of representing the Dirac equation in matrix form? Why we have to use matrices?

Sõnad, sõnad... aga kus on valemid koos selgitustega?

Diraci võrrand esitatakse maatrikskuju kaudu, kuna relativistliku lainevõrrandi lahend peab sisaldama nii spini kui ka positroni eksistentsi, mida ei suuda edastada skalaarvõrrand. Maatriksid (gamma-maatriksid) võimaldavad siduda neljamõõtmelise aeg-ruumi ja kvantvälja spinnorkujulise struktuuri, tagades Lorentzi invariantisuse ja sobivuse kvantväljateooriaga.

- Relativistlik invariantisus: Diraci võrrand peab olema kooskõlas erirelatiivsusteooriaga, seega peab ta käituma õigesti Lorentzi teisenduste all. See saavutatakse ainult siis, kui võrrand sisaldab maatrikseid (gamma-maatriksid), mis on spetsiaalselt konstrueeritud Lorentzi invariantisuse säilitamiseks.
- Diraci võrrand kirjeldab fermione, nagu elektron, millel on spin $\frac{1}{2}$. Seda omadust ei saa kirjeldada tavalise skalaarkujulise võrrandiga - selleks on vaja spinoreid ja nende käitumise sidumiseks ruumajaga on vaja maatrikseid.
- Antiosakesed: Diraci võrrandi maatrikskuju toob automaatselt kaasa nii positiivse kui ka negatiivse energia lahendid, millest viimased viivad positroni (antiosakese) olemasolu ennustusele.