

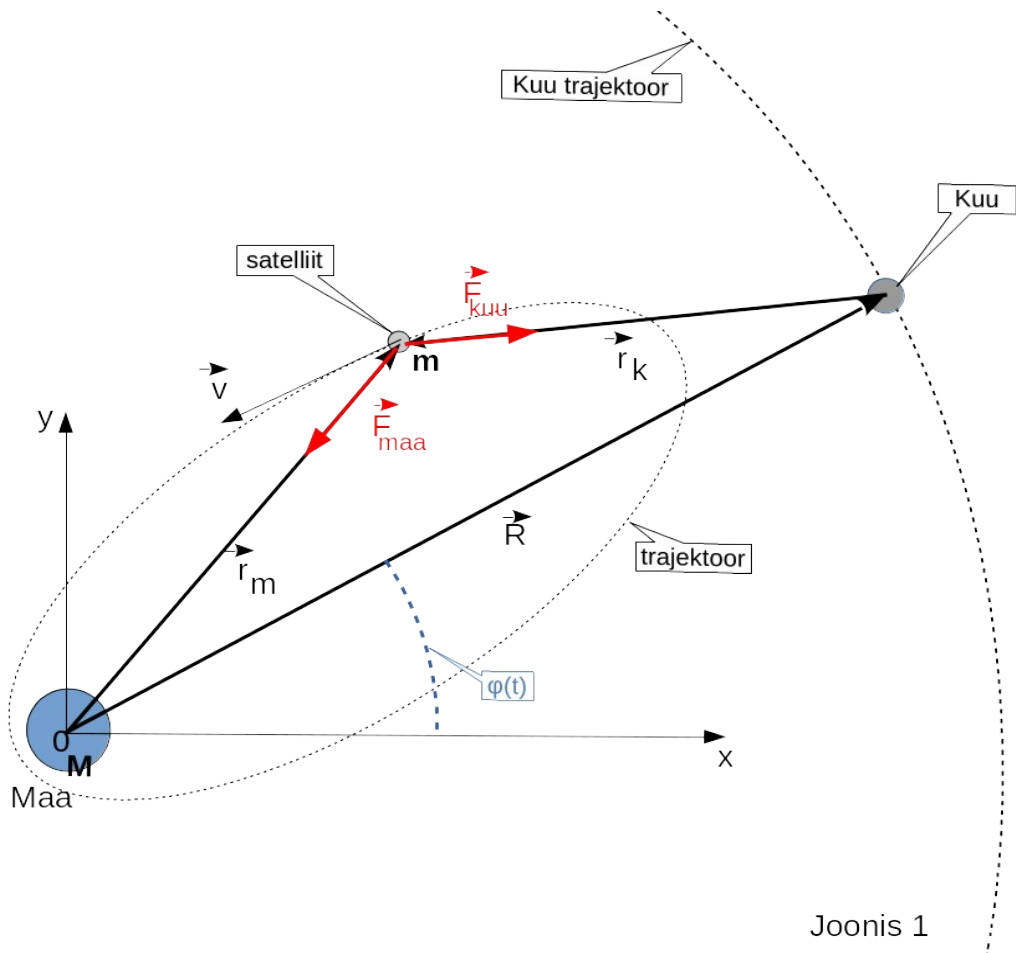
9. Lend Maalt Kuule.

9.1 Teoreetilised alused

Modelleerime satelliidi liikumist ümber Kuu. Ülesanne koosneb kolmest põhi osast:

1. Arvutada seda kuidas satelliidi koordinaadid $x(t)$, $y(t)$ ja kiiruse projektsioonid $v_x(t)$, $v_y(t)$ sõltuvad ajast.
2. Arvutada kineetilise, potentsiaalse ja kogu eneeiad eninevates aja momentides.
3. Gravitatsiooniline manöövri seletus.

Eeldame et satelliit liigub Maa atmosfääri väljaspool, see tähendab, et satelliiti mõjutavad ainult maa ja kuu gravitatsioonijõud. (Vaata joonist 1).



Joonis 1

Kirjeldame vajalikke vektoreid:

$\vec{v}$ – satelliidi kiirus

$\vec{r}_m \equiv (x_m, y_m, z_m)$ – satelliidi koordinaadid Maa suhtes

$\vec{r}_k \equiv (x_k, y_k, z_k)$ – satelliidi koordinaadid Kuu suhtes

$\vec{R} \equiv (X, Y, Z)$ – Kuu koordinaadid Maa suhtes

$\vec{F}_{maa}$ – Maa poolt mõjuv gravitatsioonijõud

$\vec{F}_{kuu}$ – Kuu poolt mõjuv gravitatsioonijõud

Selge, et $\vec{r}_{kuu} = \vec{r}_{maa} - \vec{R}$.

Arvutame gravitatsioonijõud eraldi:

a) Kehale Maa poolt mõjuv jõud

$$\vec{F}_{maa} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r_m^3} \cdot \vec{r}_m, \text{ siin } G = 6.67408 \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \text{ -gravitatsiooni konstant, } m \text{ -satelliidi mass, } M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg -Maa mass.}$$

b) Kehale Kuu poolt mõjuv jõud

$$\vec{F}_{kuu} = -G \cdot \frac{m \cdot M_k}{r_k^3} \cdot \vec{r}_k = -G \cdot \frac{m \cdot M_k}{|\vec{r}_m - \vec{R}|^3} \cdot (\vec{r}_m - \vec{R}), \text{ siin } M_k = 7.34767309 \times 10^{22} \text{ kg - Kuu mass.}$$

Teaved Maa ja Kuu kohta:

$$R_{maa} = 6378 \text{ km,}$$

$$R_{kuu} = 1737,1 \text{ km}$$

$$R = 384\,400 \text{ km} - \text{Kuu orbiidi keskmine raadius (Kuu orbiit peaaegu on t'pne ring)}$$

$$V_k = 1.022 \text{ km/s} - \text{Kuu orbitaal kiirus (peaaegu konstantne)}$$

$$T = 27.321661 \text{ päeva} - \text{Kuu tiirlemise periood}$$

Esimene kosmiline kiirus:

Kui keha tiirleb Maakera ringorbiiti mööda, mille raadius erineb vähe Maa raadiusest, peab ta liikuma teatud kiirusega v_1 mida nimetatakse esimeseks kosmileseks kiiruseks. Kui keha liigub Maa pinna mööda siis liikumise võõrand (teine Newtoni seadus) välja näeb nii:

$$m \cdot a = m \cdot g, \text{ siin } g - \text{raskuse kiirendus Maa pinnal.}$$

$$\text{Kui trajektoor on ringjoon siis kiirendus on kesktõmbe kiirunduseks: } \frac{m \cdot v^2}{R_{maa}} = m \cdot g \text{ siis esimene kosmiline kiirus}$$

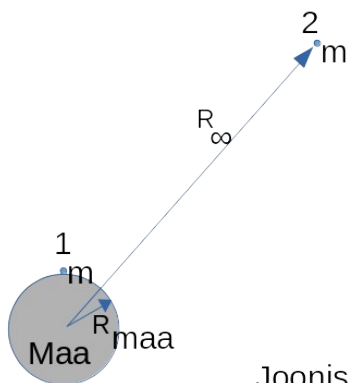
võrdub:

$$v_1 = \sqrt{g \cdot R_{maa}} = 7.8 \text{ km/s}.$$

$$\text{Üldiselt esimene kosmiline kiirus sõltub trajektoori kõrgust ja üldinevalem siis välja näeb nii: } v_1(h) = \sqrt{\frac{G \cdot M_{maa}}{(R_{maa} + h)}}.$$

Liikudes v_1 kiirusega ei lange keha Maa peal.

Teine kosmiline kiirus:



Joonis 2

Kiirus mis vajalik keha eemaldamiseks Maalt lõpmatuseni. Teise kosmilise kiiruse saab arvutada energia säästmise seaduse alusel. Kui meil on kaks massid M ja m siis potentsiaalne vastasmõju energia arvutatakse valemiga:

$$E_{pot} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{R}. \text{ Arvutame keha koguenergiat Maa pinnal ja lõpmatus.}$$

$$1) \text{ Maa pinnal kogu mehaaniline energia võrdub: } E_1 = -\frac{G \cdot m \cdot M}{R} + \frac{m \cdot v_1^2}{2}$$

me eeldame et keha stardib reise kosmilise kiirusega (joonis 2).

$$2) \text{ Lõpmatus kogu energia võrdub nulli } E_2 = 0.$$

Koguenergia jääb samaks $E_1 = E_2$, siis teine kosmiline kiirus võrdub:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot R_{maa}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Nüüd arvutame satelliidi koordinaatid ja kiiruste sõltuvuste ajast. Selle jaoks on vaja lahendada differentsiaal võrrandid (või differentsiaal võrrandite süsteem) mis annab meile teine Newtoni seadus (vektori vormis). Võrreldes elmiste ülesandetega raskuse kiirenduse arvutamiseks me peame kasutada tõpned valemid võetud Newtoni gravita-tsiooni seadusest.

$$\vec{a} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r_m^3} \cdot \vec{r}_m - G \cdot \frac{m \cdot M_k}{|\vec{R} - \vec{r}_m|^3} \cdot (\vec{R} - \vec{r}_m)$$

Nagu see oli tehtud eelmises ülesannes, kasutame vektorite projektsioonid. Projitseerime kõik vektorid x ja y-telgidel (vaata joonist).

Kui võtame arvesse et $v_x = \dot{x}, a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ ja $v_y = \dot{y}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$ siis teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi asemel me võime integreeruda esimest järku nelja võrrandi süsteemi.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x & \ddot{x}_m &= -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r_m^3} \cdot x_m - \frac{G \cdot M_k \cdot 10^{-9}}{|\vec{R} - \vec{r}_m|^3} \cdot (X - x_m) & \ddot{y}_m &= -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r_m^3} \cdot y_m - \frac{G \cdot M_k \cdot 10^{-9}}{|\vec{R} - \vec{r}_m|^3} \cdot (Y - y_m) \\ \dot{y} &= v_y \end{aligned}$$

$$r_m^3 = (x_m^2 + y_m^2 + z_m^2)^{\frac{3}{2}}, \quad |\vec{R} - \vec{r}_m|^3 = ((X - x_m)^2 + (Y - y_m)^2 + (Z - z_m)^2)^{\frac{3}{2}}$$

Kõik kaugused ja pikkused on konverteeritud meetritest kilomeetridesse.

Antud võrrandi integreerimiseks saab kasutada modifitseeritud Euleri algoritm või standartseid programmeid rkf45 või ode45 või mingeid teised programmeid mis saab leida saidil netlib.org.

Selge et me peame teada koordinaadi ja kiiruste väärtuste algajahetkel $x(t=0)$, $y(t=0)$ ja $v_x(t=0)$, $v_y(t=0)$ aga kiirenduse projektsioonid a_x ja a_y arvutame teatud valemitega.

Koodi leiate siin:

http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPNM/Loengud/nadal_9/

Fortran/keplersk.f90

Fortran/plot_kepler.py

Fortran/plot_kepler_visual.py

Python/maalt_kuule_liht.py

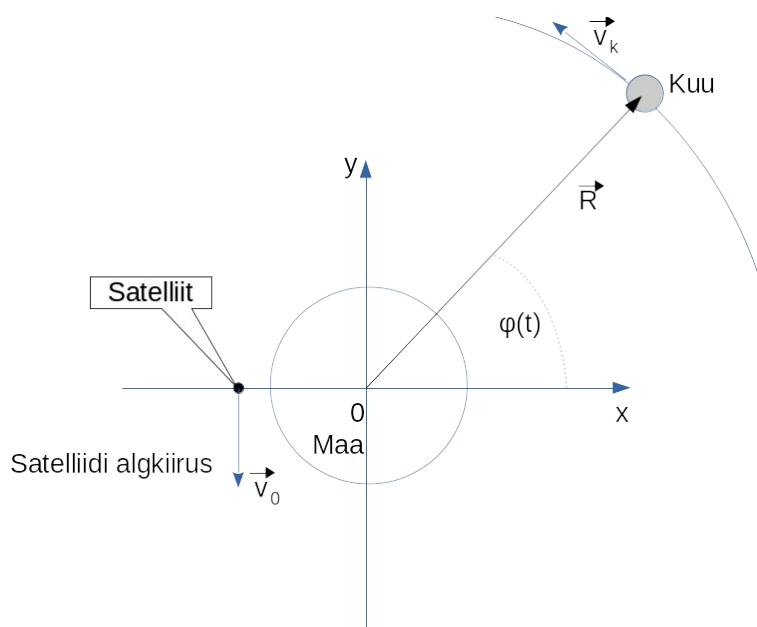
Python/maalt_kuule.py

7.3 Ülesanne:

Algtingimused: Eeldame et satelliit stardib punktistkoordinaatidega $x(t=0)=-6471$ km ja $y(t=0)=0$ km (kõrgusel 97 km) ja stardib kiirusega 11,1 km/s (peaaegu teise koosmilisega mille väärtus 11.2 km/s) ja suunatud alla (vaata joonis 3).

Veel üks küsimus on jäänud, kuidas Kuu koordinaatide arvitada? Meie ülesanne raames me eeldame et Kuu liigub ringil konstantse kiirusega 1.022 km/s. Siis Kuu koordinaatid saab otse arvutada valemitega:

$$\begin{aligned} X_{kuu}(t) &= R \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ ja } Y_{kuu}(t) = R \cdot \sin(\omega \cdot t), \\ \text{siin } \omega &= \frac{V_{kuu}}{R} = \frac{2 \cdot \pi}{T} - \text{Kuu nurkkiirus.} \end{aligned}$$



Kasutame järgmised $\varphi(t=0)$ väärtuseid: -52.435° , -52.7145° ja -60° ja kontrollime satelliidi käitumist. Siis küsimus: Millise φ nurga korral maksimeerib gravitatsiooniline manööver satelliidi kiiruse? Mitu korda?

Nüüd proovime realiseerida meie planni Fortrani ja Matlabi koodides ja kasutame differentsiaal võrrandite integreerimiseks standartset alamprogrammid. Programmid leiate kataloogidest Fortran ja Matlab.

Joonis 3