

7. Satelliidi maandumine.

7.2 Teoreetilised alused

Keha liigub ümber Maakera esimese kosmoolise kiirusega. Modelleerime maandumise protsess.

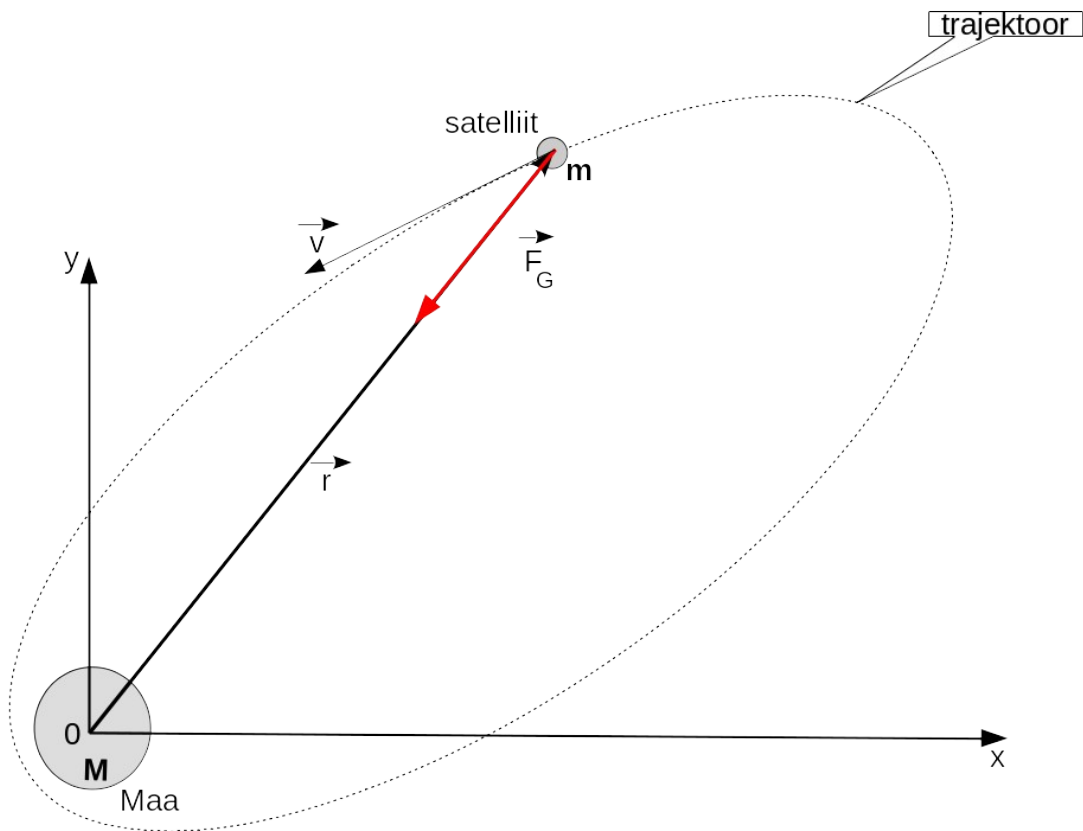
1. Kuidas keha koordinaat $x(t), y(t)$ ja kiiruse projektsioonid $v_x(t), v_y(t)$ sõltuvad ajast.

2. Kineetilise, potentsiaalse ja kogu eneeiad eninevates aja momentides.

Võtame arvesse kõik kehale mõjuvad jõud - gravitatsiooni jõud (täpne valem), Arhemedese jõud ja takistuse jõud.

a) Gravitatsiooni jõud $\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r}$, siin $G = 6.67408 \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ - gravitatsiooni konstant,

$M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ - Maa mass (või muu planeedi mass), $R_M = 6378 \text{ km}$ - Maa raadius, h - trajektoori kõrgus, m - satelliidi mass.



Joonis 1

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) \quad \text{või absoluutne väärtus} \quad g(h) = G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^2}$$

Potentsiaalse eneeigat arvutamiseks me kasutame täpne valemit:

$$E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r} \quad .$$

b) Takistuse jõud (joonis 2).

$$\vec{F}_{tak} = -0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v}$$

antud valemis:

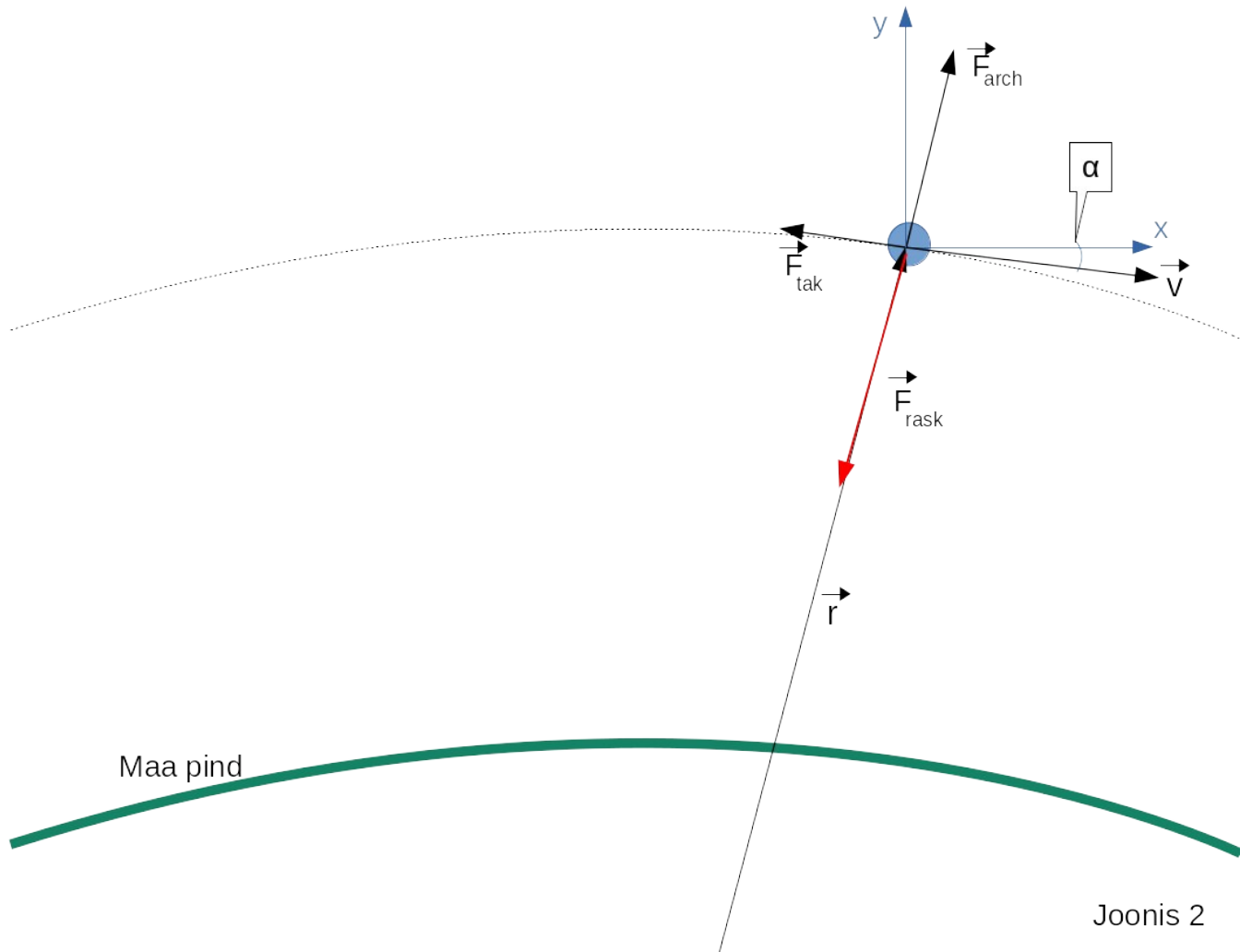
Kasutame hästi teatud valemit

C – aerodünaamiline tegur,

ρ_{atm} – atmosfääri tihedus (üldiselt sõltub kõrgust)

$\vec{v}$ – keha kiirus õhu suhtes,

S – keha ristlõige pindala



Atmosfääri tiheduse sõltuvuse kõrgusest saab arvutada baromeetrilise vaeemiga:

siin:

μ – gaasi ühe kilomooli mass,

ρ_0 – atmosfääri tihedus Maa pinnal

$$\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu g(h)}{R \cdot T} h}$$

siin:

R – universaalne gaasi konstant $8,314 \frac{J}{K \cdot kmool}$

T – atmosfääri temperatuur kelvinides

Siin tekib küsimus. Kas on vaja arvestada raskuse kiirenduse sõltuvuse kõrgust. Asi on selles et kõrgusel 100 km (Maa atmosfääri piiril) atmosfääri tihedus peaaegu võrdub nulli. Siis raskuse kiirenduse väärtus

kõrgusel 100km $g(h=100\text{ km})=\frac{G\cdot M}{(R_M+h)^2}$ ja Maa pinnal $g(h=0)=G\cdot\frac{M}{R_M^2}$. Seda parameetrite suhe

$$\frac{g(h=100\text{ km})}{g(h=0)}=\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_{maa}}\right)^2}=\frac{1}{\left(1+\frac{100}{6378}\right)^2}=0.97$$

. Nägu näete neid on praktilised võrdsed. See tähendab et

seda sõltuvuse saab ignoreerida. Ja õhu tiheduse saab arvutada valemiga:

$$\rho_{atm}(h)=\rho_0\cdot e^{-\frac{\mu g(h=0)}{R\cdot T}h}$$

c) Archimedese jõud

$$\vec{F}_{arh}=\rho_{atm}(h)\cdot g(h=0)\cdot V_{keha}\frac{\vec{r}}{r}$$

siin

V_{keha} – keha rumala ,

$g(h)$ – raskuse kiirendus ,

$\rho_{atm}(h)$ – atmosfääri tihedus

Nüüd arvutame keha koordinaati ja kiiruste sõltuvuste ajast. Selle jaoks on vaja integreerida diferentsiaalvõrrandi (või diferentsiaalvõrrandite süsteemi) mis annab meile Newtoni teine seadus (vektori vormis).

$$\vec{a}=-\frac{G\cdot M}{r^3}\cdot\vec{r}-\frac{0.5\cdot C\cdot S\cdot\rho_{atm}(h)\cdot|\vec{v}|\cdot\vec{v}}{m}+\frac{\rho_{atm}(h)\cdot g(h=0)\cdot V_{keha}}{m}\frac{\vec{r}}{r}$$

Archimedese jõu vektor on suunatud asukoha vektori suunas ja $\frac{\vec{r}}{r}$ on ühik vektor samas suunas (eeldame et Maa on sfääriline).

Nii nagu eelmises ülesannes, mugavam kasutada vektorite asemel nende projektsioonid. Projitseerime kõik vektorid x ja y-telgidel. Kui koordinaadi teljed X ja Y on valitud nagu joonisel 2 ja nulli punkt asub Maa keskpunktis, siis me saame kaks teist järku diferentsiaal võrrandi:

$$\ddot{x}=-\frac{G\cdot M}{r^3}\cdot x-\frac{0.5\cdot C\cdot S\cdot\rho_{atm}(h)\cdot|\vec{v}|}{m}\cdot v_x+\frac{\rho_{atm}(h)\cdot g\cdot V_{keha}}{m}$$

$$\ddot{y}=-\frac{G\cdot M}{r^3}\cdot y-\frac{0.5\cdot C\cdot S\cdot\rho_{atm}(h)\cdot|\vec{v}|}{m}\cdot v_y+\frac{\rho_{atm}(h)\cdot g\cdot V_{keha}}{m}$$

$$\text{ja } r^3=(x^2+y^2)^{3/2} \quad |\vec{v}|=\sqrt{(v_x^2+v_y^2)} \quad \rho_{atm}(h)=\rho_0\cdot e^{-\frac{\mu g}{R\cdot T}h}$$

Võrreldes elmiste ülesandetega raskuse kiirenduse arvutamiseks me peame kasutada tõpned valemid võetud Newtoni gravitatsiooni seadusest.

Nüüd määrameme mudeli parameetrid (enam vähem reaalsed):

$R_{\text{maa}}=6378 \text{ km}$	<i>Maa raadius</i>
$M_{\text{maa}}=M=5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	<i>Maa mass</i>
$G=6.67408 \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$	<i>gravitatsiooni konstant</i>
$r_{\text{keha}}=1. \text{ m}$	<i>keha on pall raadiusiga 1m</i>
$C=0.45$	<i>palli jaoks</i>
$m=2000 \text{ kg}$	<i>satelliidi mass on 20 T</i>
$g=9,814 \text{ m/s}^2$	<i>raskuse kiirendus Maa pinnal</i>
$\mu=29 \text{ kg/kmool}$	
$R=8310 \text{ J/kmool K}$	
$T=293 \text{ K}$	
$P=100000 \text{ Pa}$	

Atmosfääri tihedust Maa pinnal arvutame ideaalse gaasi olekuvõrrandiga.

$$PV_{\text{gaas}} = \frac{m_{\text{gaas}}}{\mu_{\text{gaas}}} RT \quad \text{avalame tihedust} \quad \rho_0 = \frac{m_{\text{gaas}}}{V_{\text{gaas}}} = \frac{P \cdot \mu_{\text{gaas}}}{R \cdot T}, \text{ siin } P - \text{gaasirõhk.}$$

Me kasutame järgmised parameetrite väärtused: $P=100000 \text{ Pa}$ $T=300 \text{ K}$ ja eeldame et atmosfäär on isothermiline (temperatuur ei sõltu kõrgust). Seosega sellega et satelliidi mas on suhtlised suur siis saab ignoreerida ka Arhemedese jõu (Archimedesese jõuga seotud kiirenduse osa on 1000 korda väiksem kui gravitatsiooni tõttu tekkiv kiirendus.).

Kui võtame arvesse et $v_x = \dot{x}, a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ ja $v_y = \dot{y}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$ siis teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi asemel me võime integreeruda esimest järku nelja võrrandi süsteemi.

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{G \cdot M}{r^3} \cdot x - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{\text{atm}}(h) \cdot |\vec{v}|}{m} \cdot v_x$$

$$a_y = \ddot{y} = -\frac{G \cdot M}{r^3} \cdot y - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{\text{atm}}(h) \cdot |\vec{v}|}{m} \cdot v_y$$

Antud võrrandi integreerimiseks saab kasutada modifitseeritud Euleri algoritm või standartseid programmeid rkf45 või ode45, või mingeid teised programmeid mis saab leida saidil netlib.org.

Selge et antud algorimi kasutamiseks me peame teada koordinaadi ja kiiruste väärtuste algajahetkel $x(t=0)$, $y(t=0)$ ja $v_x(t=0)$, $v_y(t=0)$ aga kiirenduse arvutame teatud valemitega.

Kõik pikkused ja kaugused meie ülesannes mõõdetatakse meetrites. Maa kera radius siis võrdub 6378000 m, see on liiga suur arv. Ka on võimalik kasutada meetrite asemel kilomeetrit ja mida siis on vaja muuta meie võrrandites?

1). Esimestes võrrandites ei ole vaja midagi muuta, me võime otse kasutada meetrite asemel kilomeetrid.

2). Teises võrrandis, näiteks $\ddot{x} = -\frac{G \cdot M}{r^3} \cdot x - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}|}{m} \cdot v_x$ korrutame ja jagame kõik koordinaadid ja kiirused ühe tuhandega.

$$\frac{\ddot{x} \cdot 1000}{1000} = -G \cdot \frac{M}{\left(\frac{r \cdot 1000}{1000}\right)^3} \cdot \left(\frac{x \cdot 1000}{1000}\right) - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot \left|\frac{\vec{v}}{1000} \cdot 1000\right|}{m} \cdot \frac{v_x \cdot 1000}{1000}.$$

Siis kasutame uued koordinaadid ja kiirused $\frac{x}{1000} \rightarrow x$, $\frac{r}{1000} \rightarrow r$ ja $\frac{v_x}{1000} \rightarrow v_x$ siis:

$$\frac{h}{1000} \rightarrow h \quad \ddot{x} = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r^3} \cdot x - \frac{500 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}|}{m} \cdot v_x$$

Lõpus, muudetud võrrandite süsteem välja näeb nii:

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_x = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r^3} \cdot x - \frac{500 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}|}{m} \cdot v_x$$

$$\dot{v}_y = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r^3} \cdot y - \frac{500 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}|}{m} \cdot v_y$$

$$r^3 = \sqrt{(x^2 + y^2)^3} \quad |\vec{v}| = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} ,$$

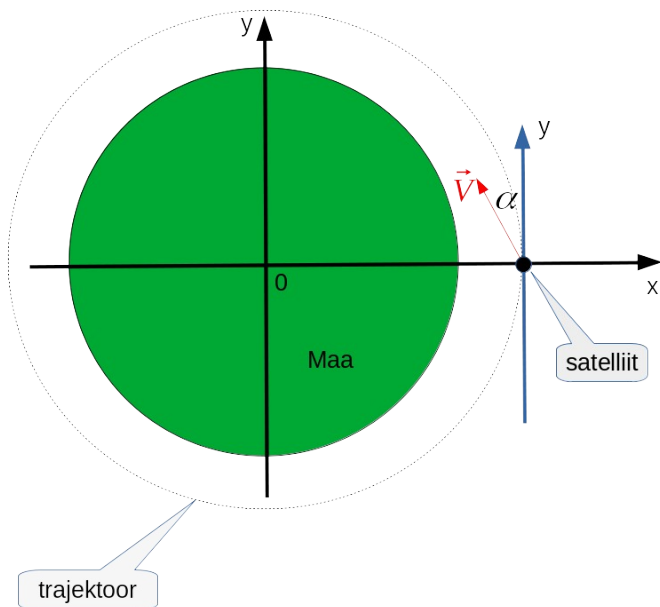
ja atmosfääri tihedus $\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{1000 \cdot \mu \cdot g}{R \cdot T} h}$ (Viimases valemis trajektoori kõrgus **h** mõõdetakse meetrites siis korrutame ja jagame kõrgust **h** ühe tuhandega $\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{1000 \cdot \mu \cdot g(h=0)}{R \cdot T} \frac{h}{1000}}$ ja asendame $\frac{h}{1000} \rightarrow h$ siis

saame valemit $\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{1000 \cdot \mu \cdot g}{R \cdot T} h}$). Antud valemis figureerib trajektoori kõrgus mille väärtuse saab arvutada nii:

$$h = |r| - R_{maa} = \sqrt{(x^2 + y^2)} - R_{maa} \quad (\text{kõrgus } \mathbf{h}, \text{ koordinaadid } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ ja Maa raadius mõõdetatakse juba kilomeetrites}).$$

Tasub meelde tuletada mudeli piiranguid:

- 1.) Lõppkiirus ei pea ületada 10 m/s (Maapinnal). Vajadusel saab kasutada langevarju.
- 2.) Ülekoormus ei pea ületada 10g või $\sim 100 \text{ m/s}^2$.
- 3.) Kogu langemise aeg ei pea ületada 20 min (on seotud mooduli ülesoojendusega).



Kasutame järgmised algtingimused (vt. joonist).

α nuga väärtust saab varieerida

Nüüd proovime realiseerida meie planni Fortrani ja Matlabi koodides ja kasutame differentsiaal võrrandite integreerimiseks standartset programmid. Atmosfääri Sisendamise nurk α valitakse vahemikus $[0^\circ..10^\circ]$ - kasutatakse reaalses maandumise protsessides.

6.2 Kood

Nüüd proovime realiseerida meie planni Fortrani ja Matlabi koodides ja kasutame differentsiaal võrrandite integreerimiseks standartset programmid.

Koodi leiame siin:

http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPNM/Loengud/nadal_7/Fortran/kepler_rkf45_sat_res.f90
 Fortran/plot_kepler_maandumine.f90
 Fortran/plot_kepler.py
 Fortran/plot_kepler_anim.py
 Python/kepler_lihtne.py
 Python/kepler_maandumine.py

rkf45(f,neqn,y,t,tout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)

f – Alamprogrammi nime tuletiste arvutamiseks, meie puhul $\dot{x}$ ja $\dot{v}_x$. Teiste sõnadega siin me peame realiseerida üleval kirjutatud diferentsiaalvõrrandid

neqn – Võrrandite arv, meie juhul see on 2.

y – Ühemõõtmeline massiiv pikkusega “neqn”, meie juhul see on 4.
 Fortrani koodis see masiiv kirejeldatakse nii: **real y(4)**.

Samal ajal massiiv y(4) kasutatakse arvutatud parameetrite väärtuste salvestamiseks, meie juhul koordinaadi ja kiiruse väärtused. Lepime kokku et hoiame koordinaadi väärtuse massiivis esimesel kohal ja kiirust teisel kohal. Teist sõnaga y(1)=x, y(2)=y ja y(3)=V_x, y(4)=V_y.

t- ajaväärtus antud ajahetkel

tout- ajaväärtus järgmisel ajahetkel **tout=t+dt**, siin **dt** - ajasamm

relerr -	suhteline viga
abserr -	absoluutne viga
iflag -	algne väärtus 1
work -	reaal töömassiiv pikkusega $6 \cdot n + 3$, meie juhul 27.
iwork -	täisarvuline töömassiiv fikseeritud pikkusega 5.

6.3 Ülesanded:

1. Eeldame et satelliit alg aja hetkel asub kõrgusel 200 km ja liigub esimese koosmilise kiirusega antud kõrgusel (arvutage ise).

Siis on meie ülesanne leida atmosfääri sisenemise ohutu nurga väärtus. Kas on vaja kasutada langevari ? Miks?

2. Eeldame et satelliit alg aja hetkel asub kõrgusel 100 km ja liigub esimese koosmilise kiirusega antud kõrgusel aga Marsil (arvutage ise).

Siis on meie ülesanne on sama, leida atmosfääri sisenemise ohutu nurga väärtus. Kas on vaja kasutada langevari ? Mis suurus (raadius) ta peaks olema?