

6. Satelliidi vabaliikumine Maa gravitatsiooniväljas (Kepleri ülesanne).

6.1 Teoreetilised alused

Modelleerime keha liikumist ümber Maakera esimese kosmilise kiirusega. Selle jaoks on vaja arvutada järgmised parameetrid:

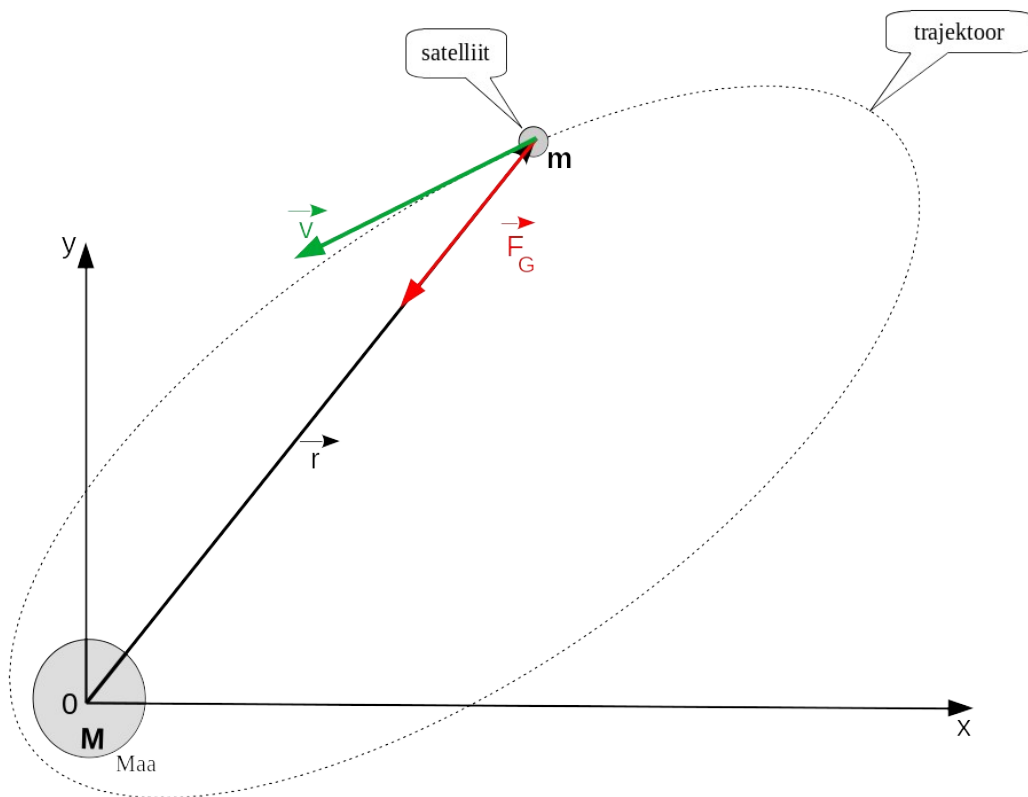
- 1). Kuidas keha koordinaat $x(t)$, $y(t)$ ja kiiruse projektsioonid $v_x(t)$, $v_y(t)$ sõltuvad ajast.
- 2). Kineetilise, potentsiaalse ja kogu energiad erinevates aja momentides.

Eeldame et kehale mõjub ainult gravitatsiooni jõud:

Gravitatsiooni jõud (Newtoni gravitatsiooni seadus) (joonis 1)

$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r} \quad \text{ja potentsiaalne energia arvutatakse järgmise valemiga:} \quad U_{pot} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r} \quad .$$

siin $G=6.67408 \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ -gravitatsiooni konstant, $M=5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ - Maa mass, $R_M=6378 \text{ km}$ - Maa keskmine raadius.



Joonis 1

Selles lähenduses g -raskuskiirendus sõltub trajektoori kõrgusest (täpne valem):

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) \quad \text{või absoluutne väärtus} \quad g(h) = G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^2} \quad .$$

Nüüd arvutame keha koordinaadi ja kiiruse aja sõltuvuse. Selle jaoks on vaja lahendada diferentsiaalvõrrandi (või diferentsiaalvõrrandite süsteemi) mille annab Newtoni teine seadus (see on nii nimetatakse keha liikumisevõrrand).

$$\vec{a} = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Nagu eelmises ülesannes, mugavam kasutada vektorite asemel nende projektsioonid. Projeteerime kõik vektorid x ja y-telgedel. Projekteerime kõik vektorid x ja y-telgedel. Kui koordinaadi teljed ja nulli punkt on valitud nagu joonisel siis: me saame kaks diferentsiaalvõrrandi:

$$\ddot{x} = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot x \quad \ddot{y} = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot y \quad \text{siin} \quad r^3 = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)^3}.$$

Võrreldes eelmiste ülesannetega raskuskiirenduse arvutamiseks me peame kasutada täpned valemid võetud Newtoni gravitatsiooni seadusest.

Nüüd vaja määrata vajalike parameetrid :

$$R_{\text{maa}} = 6378 \text{ km}$$

$$M_{\text{maa}} = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$G = 6.67408 \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

Võttes arvesse et $v_x = \dot{x}, a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ ja $v_y = \dot{y}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$ siis teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi asemel me võime lahendada esimest järku nelja võrrandi süsteemi.

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_x = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot x$$

$$\dot{v}_y = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot y$$

Antud difvõrrandite süsteemi lahendamiseks saab kasutada standartseid programmeid rkf45, ode45 mis saab leida saidil netlib.org.

Selge et antud algoritmi kasutamiseks me peame teada koordinaadi ja kiiruse väärtuste alg ajahetkel $x(t=0)$, $y(t=0)$ ja $v_x(t=0)$, $v_y(t=0)$. Kiirenduse arvutame üleval kirjutatud valemitega.

Kõik pikkused ja kaugused meie ülesannes mõõdetatakse meetrites. Aga Maa kera radius meetrites võrdub 6378000 m, see on liiga suur arv. Kas on võimalik kasutada kilomeetrit meetrite asemel ja mida siis on vaja muuta meie võrrandites?

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x & \dot{v}_x &= -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot x & \dot{v}_y &= -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot y & \text{ja} & r^3 &= (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{3}{2}} \\ \dot{y} &= v_y \end{aligned}$$

1). Võrrandis $\dot{x} = v_x$ koordinaat mõõdetatakse metrites ja kiirus m/s. Aga selle asemel ma tahks kasutada km ja km/s, kuidas seda saab teha? Selle jaoks jagame ja korrutame antud võrrandi tuhandega $\frac{\dot{x}}{1000} = \frac{v_x}{1000}$. Ja

sisendame uue koordinaadi $\frac{x}{1000} \rightarrow x$ ja kiiruse $\frac{v_x}{1000} \rightarrow v_x$ väärtuste. Uued parameetrid mõõdetatakse

kilomeetrites ja kilomeetrites/sekundis. See tähendab et esimestes võrrandites üldse ei ole vaja midagi muuta, me võime otse kasutada kilomeetrid meetrite asemel.

2). Teistes võrrandites $\dot{v}_x = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot x$ tuleb sama. Jälle kasutame uued koordinaadid ja kiirused $\frac{v_x}{1000} \rightarrow v_x$

ja $\frac{r}{1000} \rightarrow r$ siis:

$$\frac{\dot{v}_x}{1000} = -\frac{G \cdot M}{\left(\frac{1000 \cdot r}{1000}\right)^3} \cdot \frac{x}{1000}$$

lihtsustame, siis

$$\frac{\dot{v}_x}{1000} = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{\left(\frac{r}{1000}\right)^3} \cdot \frac{x}{1000} \quad \text{ja siis saime} \quad \dot{v}_x = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r^3} \cdot x.$$

Siis uus, muudetud (modifitseeritud) võrrandite süsteem välja näeb nii:

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_x = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r^3} \cdot x$$

$$\dot{v}_y = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r^3} \cdot y \quad \text{ja} \quad r^3 = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)^3}$$

Tuletan meelde et viimastes võrrandites koordinaadid mõõdetakse kilomeetrites ja kiirused kilomeetrites sekundi kohta !

6.2 Kood

Nüüd proovime realiseerida meie planni Fortrani ja Pythoni koodides ja kasutame differentiaal võrrandite integreerimiseks standartset programmi (rkf45).

Koodi leiame siin:

http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPNM/Loengud/RKF45_alamprogrammi_parameetrite_kirjeldus/

Fortran/kepler_rkf45_sat.f90

Fortran/plot_kepler.py

Fortran/plot_kepler_anim_v1.py

Fortran/plot_kepler_anim_v2.py

Fortran/srkf45.for

Python/kepler.py

rkf45(f,neqn,y,t,tout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)

f –	Alamprogrammi nime tuletiste arvutamiseks, meie puhul $\dot{x}$ ja $\dot{v}_x$. Teiste sõnadega siin me peame realiseerima üleval kirjutatud diferentsiaalvõrrandid
neqn –	Võrrandite arv, meie juhul see on 4.
y –	Ühemõõtmeline massiiv pikkusega “neqn”, meie juhul see on 4. Fortrani koodis see masiiv kirejeldatakse nii: real y(4) . Samal ajal massiiv y(4) kasutatakse arvutatud parameetrite väärtuste salvestamiseks, meie juhul koordinaadi ja kiiruse väärtused. Lepime kokku et hoiame koordinaadi väärtuse massiivis esimesel kohal ja kiirust teisel kohal. Teist sõnaga y(1)=x, y(2)=y ja y(3)=V _x , y(4)=V _y .
t -	ajaväärtus antud ajahetkel
tout -	ajaväärtus järgmisel ajahetkel tout=t+dt , siin dt - ajasamm
relerr -	suhtlline viga
abserr -	absoluutne viga
iflag -	kasutatakse arvutamise protsessi juhtimiseks (algne väärtus on 1)
work -	reaal töomassiiv pikkusega 6*neqn+3, meie juhul 27.
iwork -	täisarvuline töomassiiv fikseeritud pikusega 5.

6.3 Ülesanded:

1. Eeldame et et satelliit hakkab liikuda järgmiste algtingimustega:

x=6578km (asub kõrgusel 200 km)

y=0 km

V_x(0)= 0.

V_y(0)= 7,8 km/s (esimene kosmiline kiirus Maapinnal)

a) Kus kohas asub kõige kaugem trajektoori punkt (Maapinnast)?

b) Mis kiirusega ja kiirendusega lsatelliid liigub antud punktis?

2. Eeldame et et satelliit hakkab liikuda järgmiste algtingimustega:

x=6378km (asub kõrgusel 0 km)

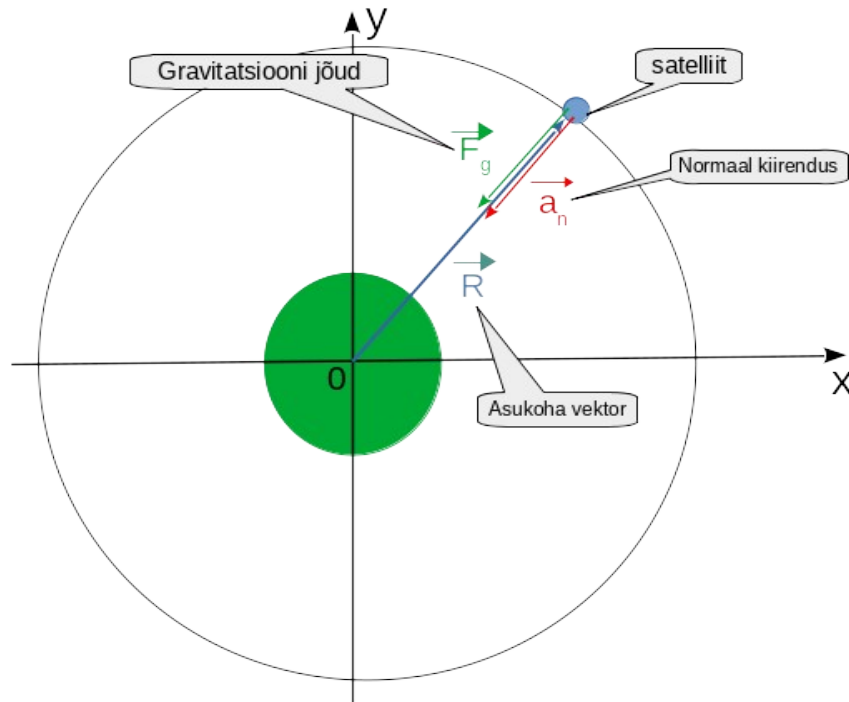
y=0 km

V_x= 8.

V_y= 0 km/s

Mis toimub sel juhul?

Lisa 1. Kosmilised kiirused



Esimene kosmiline kiirus on vähim kiirus, mille peab omandama lendav keha, et jõuda jäädavalt ringikujulisele orbiidile ümber planeedi, mille pinnalt ta oma lennuteekonda alustas.

Teise Newtoni seaduse saab kujutatda:

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{a}_n \quad \text{või} \quad G \cdot \frac{m \cdot M_{maa}}{R^3} \cdot \vec{R} = m \cdot \vec{a}_n.$$

Kasutame vektorite moodulid, siis:

$$G \cdot \frac{M_{maa}}{R^2} = a_n = \frac{v^2}{R} \quad \text{avaldame kiirust, siis:} \quad V_I = \sqrt{\frac{G \cdot M_{maa}}{(R_{maa} + h)}} \quad \text{siin } h - \text{kõrgus ja Maapinnal}$$

võrdub 7,9 km/s.

Teine kosmiline kiirus on vajalik satelliidi külgetõmbejõu piirkonnast lahkumiseks.

Teise kosmilise kiiruse arvutamiseks kasutame energia jäävuse seadust. Eeldame, et kosmoselaev on algselt kõrgusel h ja liigub teise kosmilise kiirusega. Siis kogu mehaaniline energia arvutatakse järgmiselt:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m \cdot v_{II}^2}{2} - G \cdot \frac{m \cdot M_{maa}}{R}$$

Lõpmatus ($R \rightarrow \infty$) potentsiaalne ja kineetiline energiad on nullid (kui algkiirus on täpne teine kosmiline kiirus). Siis saab otse saada valemit teise kosmilise kiiruse arvutamiseks:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{maa}}{(R_{maa} + h)}}$$

Nägu näete $V_{II} = \sqrt{2} \cdot V_I$. Ja Maapinnal võrdub 11,2 km/s.