

## 5. Keha kahemõõtmelise languvuse Maa gravitatsiooniväljas.

### 5.1 Teoreetilised alused

Keha ripub liikumatult kõrgusel 10 m. Me peame arvutada järgmised parameetrid:

1. Kuidas keha koordinaadid  $x(t), y(t)$  ja kiiruse projektsioonid  $v_x(t)$  ja  $v_y(t)$  sõltuvad ajast.
2. Kineetilise, potentsiaalse ja kogu eneeiad eninevates aja momentides.

Võtame arvesse kõik kehale mõjuvad jõud - gravitatsiooni jõud, Archimedese jõud ja takistus jõud.

#### a) Gravitatsiooni jõud (joonis 1)

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r}, \text{ siin}$$

$G=6.67408 \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ -gravitatsiooni konstant,  $M=5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ -Maa mass,  $R_M=6378 \text{ km}$  - Maa raadius,  $h$ - trajektoori kõrgus.

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M \vec{r} + h) = -m \cdot \left( G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M \vec{r} + h) \right) = m \cdot \vec{g},$$

siin  $g$  -raskuse kiirendus mille väärtus sõltub kõrgust:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M \vec{r} + h) \text{ või absoluutne väärtus}$$

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^2}$$

Kui  $h \ll R_M$  siis  $g(h=0) = \frac{G \cdot M}{R_M^2} = 9.814 \text{ m/s}^2$  -gravitatsiooni kiirendus Maa pinnal (vaadake eelmises loengus).

#### b) Takistusjõud.

Joonis 1 Kasutame hästi teatud valemit:

$$\vec{F}_{tak} = -0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v}$$

antud valemis:

$C$  – aerodünaamiline tegur,

$\rho_{atm}$  – atmosfääri tihedus (üldiselt sõltub kõrgust)

$\vec{v}$  – keha kiirus õhu suhtes,

$S$  – keha ristlõige pindala

Atmosfääri tiheduse sõltuvuse kõrgust saab arvutada baromeetrilise veaemiga:

$$\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu g(h)}{R \cdot T} h} \text{ siin:}$$

$\mu$  – gaasi ühe kilomooli mass,  
 $\rho_0$  – atmosfääri tihedus Maa pinnal  
 $R$  – universaalne gaasi konstant  $8,314 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kmool}}$   
 $T$  – atmosfääri temperatuur kelvinides

Arvatakse, et Maa atmosfääri piir on kõrgusel 100 km. See tähendab, et meie mudelis võime eeldada, et gravitatsiooni kiirendus ei sõltu kõrgusest sellepärast et Maa pinnal ja kõrgusel 100 km on kiirendus peaaegu

sama. Tõestame seda:  $\frac{g(h)}{g(h=0)} = \left(1 + \frac{h}{R_{Maa}}\right)^2$  Kui keha trajektoori maksimaalne kõrgus on 100 km siis seda suhe võrdub 1.02. Raskusekiirendused on peaaegu võrdsed, erinevus on ainult 2% ja seda saab ignoreerida.

### c) Archimedese jõud (vektori kujul)

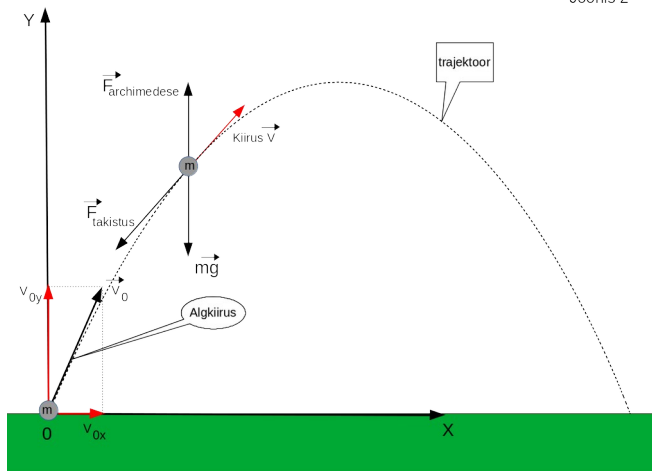
$$|\vec{F}_{arch}| = \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{siin}$$

$V_{keha}$  – keha rumala,  $g(h)$  – raskuse kiirendus,  $\rho_{atm}(h)$  – atmosfääri tihedus

Nüüd arvutame keha koordinaati ja kiiruse sõltuvuste ajast. Selle jaoks on vaja integreerida differentsiaal võrrandi (või differentsiaal võrrandite süsteem) mis annab meile teine Newtoni seadus (joonis 2).

$$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{tak} + \vec{F}_{arch}$$

Joonis 2



On mugavam kasutada vektorite asemel nende projektsioonid. Projitseerime kõik vektorid x ja y-telgidel ja arvestame et takistuse jõud ja kiiruse vektor on alati vastas suunatud. Kui koordinaadi teljed X,Y ja nulli punkt on valitud nagu joonisel siis: me saame kaks differentsiaal võrrandi:

$$m \ddot{x} = -0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_x$$

$$m \ddot{y} = -m \cdot g - 0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_y + \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}$$

Jagame keha massiga siis saame:

$$\ddot{x} = -\frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_x}{m}$$

$$\ddot{y} = -g - \frac{(0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_y)}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}}{m}$$

kiiruse absoluut väärtus arvutatakse siis:  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

Nagu eelmises loengus, eeldame et atmosfääri tihedus sõltub ainult kõrgusest (trajektoori kõrgus väiksem kui Maa raadius). Raskuse kiirendus jääb samaks.

### Nüüd määrame mudeli parameetrid (eeldame et keha liigub Maapinna lähedal):

$g = 9.814$  ja ei sõltu kõrgusest,

$r_{keha} = 0.1$  m keha on pall raadiusega 10 cm,

$C = 0.47$  palli jaoks 0.47 ([https://en.wikipedia.org/wiki/Drag\\_coefficient](https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient)),

$m = 0.2$  kg palli mass on 200g,

$g = 9,814$  m/s<sup>2</sup> raskuse kiirendus. Kui keha trajektoori kõrgus  $\gg$  kui Maa radius siis  $g$  ei sõltu kõrgusest.

Atmosfääri tihedust arvutame baromeetriline valemiga:

$$\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu g(h)}{R \cdot T} h} \quad \begin{array}{l} \mu = 29 \text{ kg/kmool} \\ R = 8310 \text{ J/kmool K} \\ T = 293 \text{ K} \end{array}$$

Tekib küsimus kuidas arvutada atmosfääri tihedust Maa pinnal. Selle jaoks saab jälle kasutada ideaalse gaasi olekuvõrrandi:

$$PV_{gaas} = \frac{m_{gaas}}{\mu_{gaas}} R T \quad \text{avalda tihedust} \quad \rho_0 = \frac{m_{gaas}}{V_{gaas}} = \frac{P \mu_{gaas}}{R T}, \text{ siin } P - \text{gaasi rõhk}.$$

Me kasutame järgmised parameetrite väärtused:  $P=100000 \text{ Pa}$   $T=300 \text{ K}$ . Eelgame et atmosfäär on isotermiline (temperatuur ei sõltu kõrgusest).

Nüüd me peame integreerida järgmist diferentsiaalvõrrandid (liikumine on kahemõõtmeline):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_x}{m} \\ \ddot{y} &= -g - \frac{(0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_y)}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}}{m} \\ |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{aligned}$$

Antud võrrandi lahendamiseks saab kasutada modifitseeritud Euleri algoritm või standartseid programme **rkf45** või mingeid teiseid programme mille saab leida saidil [netlib.org](http://netlib.org). Kuid siin tõusetub jällegi probleem. RKF45 alamprogrammi saab kasutada esimese astme diferentsiaalvõrrandite süsteemi integreerimiseks. Seda probleemi saab ära lahendada lisamuutujate kasutamisel. Klassikalisel mehaanikas on teada et keha koordinaat  $\mathbf{x}$ , kiirus  $\mathbf{v}$  ja kiirendus  $\mathbf{a}$  on seotud järgmist:

$$v_x = \dot{x}, a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad \text{ja} \quad v_y = \dot{y}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}.$$

Siis saame neli esimese astme diferentsiaalvõrrandit:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= -\frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_x}{m} \\ \dot{v}_y &= -g - \frac{(0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_y)}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}}{m} \end{aligned}$$

Selge et me peame teada koordinaadi ja kiiruse väärtuste alg ajahetkel  $x(t=0)$ ,  $y(t=0)$  ja  $v_x(t=0)$ ,  $v_y(t=0)$ . Kiirenduse arvutame ülaltoodud valemite abil.

Alustame **RKF45** fortrani programmi sisend ja väljund parameetrite kirjeldamist.

**rkf45(func, neqn, y, t, tout, relerr, abserr, iflag, work, iwork)**

**func** – Alamprogrammi nime tuletiste arvutamiseks, meie puhul  $\dot{x}, \dot{v}_x, \dot{y}, \dot{v}_y$ . Teiste sõnadega siin me peame realiseerida üleval kirjutatud diferentsiaalvõrrandid

**neqn** – Võrrandite arv, meie juhul see on 4.

- y** – Ühemõõtmeline massiiv pikkusega “neqn”, meie juhul see on 4.  
 Fortrani koodis see masiiv kirejeldatakse nii: **real y(4)**.  
 Samal ajal massiiv y(4) kasutatakse arvutatud parameetrite väärtuste salvestamiseks, meie juhul koordinaadi ja kiiruse väärtused. Lepime kokku et hoiame koordinaadi väärtuseid massiivi alguses ja kiirust masiivi lõpus. Test sõnaga y(1)=x,y(2)=y ja y(3)=V<sub>x</sub>.y(4)=V<sub>y</sub>.
- t**- ajaväärtus antud ajahetkel
- tout**- ajaväärtus järgmisel ajahetkel **tout=t+dt**, siin **dt** - ajasamm
- relerr** - suhtlline viga
- abserr** - absoluutne viga
- iflag** - kasutatakse arvutamise protsessi juhtimiseks (algne väärtus on 1)
- work**- reaali töomassiiv pikkusega 6\*neqn+3, meie juhul 27.
- iwork** - täisarvuline töomassiiv fikseeritud pikusega 5.

## 5.2 Kood

Nüüd proovime realiseerida meie planni Fortrani ja PYTHONi koodides ja kasutame differentiaali võrrandite integreerimiseks standartset programmid.

Programmid leiate kataloogidest Fortran ja Python (Pythoni koodi leiate vastavast kataloogist):

[http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPNM/Loengud/nadal\\_5/](http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPNM/Loengud/nadal_5/) Fortran/dim2\_rkf45\_v1.f90  
 Fortran/dim2\_rkf45\_v2.f90  
 Fortran/dim2\_rkf45\_v3\_tuul.f90  
 Fortran/dim2\_rkf45\_v4\_tuul.f90  
 Fortran/plot\_2d\_v1.py  
 Fortran/plot\_2d\_v2.py  
 Fortran/plot\_2d\_v2\_quiver.py  
 Fortran/srkf45.for  
 Python/5.2d\_v1.py  
 Python/5.2d\_v2.py

## 5.3 Ülesanded:

*NB! Keha on pall massiga 3 kg ja raadiusiga 10 cm*

1. Alguses asub pall Maa maapinnal. Kiirusvektor (pikkusega 15 m/s) on orienteeritud horisondi suhtes 45 kraadise nurga all.

- Mis kõrguseni ta tõuseb?
- Mis kõrguseni ta tõuseb Marsil, Veenusel ja miks?
- Joonestage vektorid  $\vec{a}, \vec{v}, \vec{F}_{\text{takistus}}$  ajahetkel 1 s Matlab programmiga "quiver".
- Arvutage palli kineetilise, potentsiaalse ja koguenergiad.
- Arvutage  $\vec{F}_{\text{takistus}}$  jõutöö (NB! Kasutage energia jäävuse seaduse).

2. Kui me eeldame et puhub tuul kiirusega 5 m/s (paremalt vasakule).  
 Kuidas seda saab arvestada programmides?