

4. Keha langemise (ühemõõtmeline) Maa gravitatsiooniväljas.

4.1 Teoreetilised alused

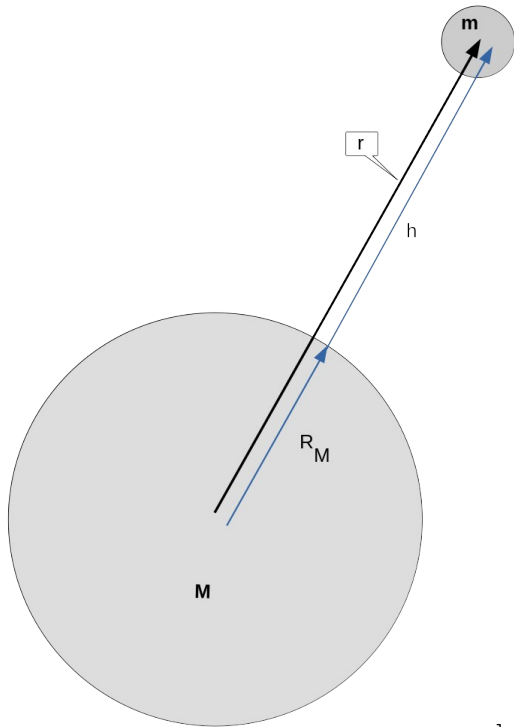
Eeldame et keha ripub liikumatult kõrgusel 10 m. Me peame arvutada järgmised keha parameetrid:

1.) Kuidas keha koordinaat $x(t)$ ja kiirus $v(t)$ sõltuvad ajast (kuidas keha liigub Maa atmosfääris).

2.) Kineetilise, potentsiaalse ja kogu energeiad erinevates aja momentides.

Võtame arvesse kõik kehale mõjuvad jõude – gravitatsiooniline jõud , Archimedese jõud (tõstejõud) ja hõõrdumist (takistusjõud).

a) Gravitatsiooniline jõud (Kasutame klassikalisst Newtoni gravitatsiooniseadust).



Joonis 1

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r} \quad , \text{ siin:} \quad (1)$$

$$G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \text{ -gravitatsiooni konstant,}$$

$$M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg - Maa mass,}$$

$R_M = 6378 \text{ km}$ - Maa raadius (keskmine väärtus). Kui h on trajektoori kõrgus, siis selge et $\vec{r} = \vec{R}_M + \vec{h} = R_M + h$ (joonis 1):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -G \cdot \frac{m \cdot M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) = \\ &= -m \cdot \left(G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) \right) = m \cdot \vec{g} \end{aligned} \quad (2)$$

siin g - raskuskiirendus, mille väärtus sõltub kõrgusest järgmiselt:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) \quad (3)$$

või raskusekiirenduse absoluutne väärtus:

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^2} \quad (4)$$

Kui $h \ll R_M$ (Keha asub peaaegu Maa pinnal) siis: $g(h=0) = \frac{G \cdot M}{R_M^2} = 9.814 \text{ m/s}^2$

gravitatsioonikiirendus Tallinna laiuskraadil.

b) Takistusjõud.

Kasutame hästi teatud valemite takistuse kirjeldamiseks:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{tak} &= -0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v} \quad \text{antud valemis:} \\ C &= \text{aerodünaamiline tegur (vt. tabelit),} \\ \rho_{atm} &= \text{atmosfääri tihedus (üldiselt sõltub kõrgust } h) \\ \vec{v} &= \text{keha kiirus } \underline{\text{õhu suhtes}}, \\ S &= \text{keha ristlõike pindala} \end{aligned}$$

Shape	Drag Coefficient
Sphere	0.47
Halfsphere	0.42
Cone	0.50
Cube	1.05
Angled Cube	0.80
Long Cylinder	0.82
Short Cylinder	1.15
Streamlined Body	0.04
Streamlined Halfbody	0.09

Measured Drag Coefficients

Aerodünaamiline tegur

Atmosfääri tihedust saab arvutada kolmel viisil:

1. Baromeetriline valemiga:

$$\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g(h)}{R \cdot T} \cdot h}, \text{ siin } \begin{matrix} \mu = 29 \text{ kg/kmool} \\ R = 8314 \text{ J/(kmool} \cdot \text{K)} \\ T = 293 \text{ K} \end{matrix} \quad (5)$$

Tekib küsimus, kuidas arvutada atmosfääri tihedust Maa pinnal $\rho_{atm}(h=0) = \rho_0$. Selle jaoks saab kasutada ideaalse gaasi olekuvõrrandi (Mendelejev-Klaiperon seadus):

$$PV_{gaas} = \frac{m_{gaas}}{\mu_{gaas}} RT \text{ avaldame tihedust } \rho_0 = \frac{m_{gaas}}{V_{gaas}} = \frac{P \cdot \mu_{gaas}}{R \cdot T}, \text{ siin } P - \text{gaasi rõhk Maa pinnal.} \quad (6)$$

Valemit (5) saab parandada, kui võtame arvesse sõltuvust (3) $g(h)$: $\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g(h=0)}{R \cdot T \cdot (1 + \frac{h}{R_M})} \cdot h}$. Selge et kui $h \ll R_M$ siis võib sõltuvuse $g(h)$ jätta arvestamata.

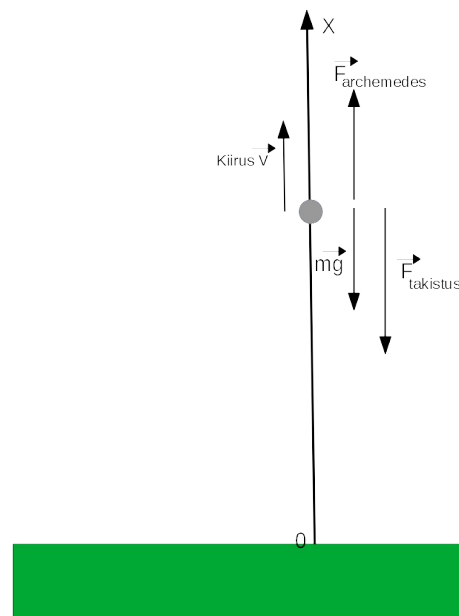
2. Kasutame standardse atmosfääri omaduste kirjeldavaid programme (kirjutatud C, Fortranis, Pythonis või Matlabis).

3. Saab kasutada atmosfääri tiheduse mõõtmise tulemusi (näiteks meteosondiga).

Meie programmides me kasutame tavaliselt esimest meetodit (Baromeetriline valem).

Baromeetrilises valemis tasub kasutada reaalseid atmosfääri parameetreid, meie puhul see on atmosfäärirõhk, temperatuur ja ühe kilomooli mass (peegeldab atmosfääri keemilist koostist). Edasi kasutame eeldust, et atmosfäär on isothermiline (atmosfääri temperatuur ei sõltu kõrgusest aga tegelikult see ei ole nii:

https://en.wikipedia.org/wiki/U.S._Standard_Atmosphere.



Arvatakse, et Maa atmosfääri piir on kõrgusel 100 km. See tähendab, et meie mudelis võime eeldada, et gravitatsiooni kiirendus peaaegu ei sõltu kõrgusest sellepärast et Maa pinnal ja kõrgusel 100 km on kiirendus peaaegu sama.

Tõestame seda: $\frac{g(h)}{g(h=0)} = \left(1 + \frac{h}{R_{Maa}}\right)^2$. Kui keha trajektoori maksimaalne kõrgus on 100 km siis seda suhe võrdub 1.02. Raskusekiirendused on peaaegu võrdsed, erinevus on ainult 2% ja seda saab ignoreerida.

c) Archimedese jõud.

Archimedese jõud alati suunatud raskuskiirenduse vastu ja arvutatakse järgmise valemiga:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{arch}| &= \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha} \text{ siin:} \\ V_{keha} &- \text{keha rumala,} \\ g(h) &- \text{raskuse kiirendus,} \\ \rho_{atm}(h) &- \text{atmosfääri tihedus kõrgusel } h. \end{aligned}$$

Nüüd arvutame keha koordinaati ja kiiruse sõltuvuste ajast. Selle jaoks on vaja integreerida differentsiaal võrrandi (või differentsiaal võrrandite süsteemi) või Newtoni teise seaduse (joonis 2):

Joonis 2

$$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{tak} + \vec{F}_{arch} \quad (7)$$

On mugavam kasutada vektorite asemel nende projektsioonid. Projeteerime kõik vektorid x-telje ja arvestame et takistusjõud ja kiiruse vektor on alati vastas suunas. Kui koordinaadi telg **X** ja nulli punkt on valitud nagu joonisel siis (joonis 2):

$$m \ddot{x} = -m \cdot g - 0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v + \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha} \quad (8)$$

Jagame seda võrrandi keha massiga siis saame:

$$\ddot{x} = -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}}{m} \quad (9)$$

Nüüd määrame mõned vajalikud mudeli parameetrid (eeldame et keha liigub Maa pinna lähedal $h \ll R_{Maa}$):

$g=9.814$ ja ei sõltu kõrgusest,

$r_{keha}=1.8$ m keha on pall raadiusega 180 cm (näiteks see on meteoroloogiline sond),

$C=0.47$ palli jaoks 0.47 (https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient),

$m=5$ kg palli mass on 5kg

$g=9,814$ m/s² raskuse kiirendus. Kui keha trajektoori kõrgus $\gg$ kui Maa radius siis **g** ei sõltu kõrgust.

Nüüd me peame integreerima järgmist differententsiaali võrrandi:

$$\ddot{x} = -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g \cdot V_{keha}}{m} \quad (10)$$

Klassikalises mehaanikas on teada et keha koordinaat **x**, kiirus **v** ja kiirendus **a** on seotud järgmist:

$$v = \dot{x}, a = \dot{v} = \ddot{x} \quad (11)$$

Antud võrrandi lahendamiseks saab kasutada modifitseeritud **Euleri** algoritmi (kiire, lihtne aga ei ole eriti täpne meetod) või Runge-Kutta-Fehlbergi meetodit järkuga 4-5 (**RKF45**) (koordinaatide ja kiiruste arvutamiseks kasutatakse Runge-Kutta meetod järkuga 4 ning sama meetod järkuga 5 kasutatakse ajasammu väärtuse reguleerimiseks) . Viimane meetod rakendati standard programmides **rkf45**, **ode45** mille saab leida saidil netlib.org.

I. **Euleri** meetod välja näeb järgmiselt:

Keha koordinaadi väärtus järgmisel aja hetkel $x(t+\Delta t)$ arvutatakse siis nii $x(t+\Delta t)=x(t)+v(t)\Delta t+a(t)\Delta t^2/2$. Siin $x(t), v(t)$ ja $a(t)$ on keha koordinaat, kiirus ja kiirendus eelmisel ajahetkel t :

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t + \frac{a(t) \cdot \Delta t^2}{2} \quad (12)$$

ja kiiruse

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t \quad (13)$$

siin Δt on integreerimise ajasamm.

Selge et antud algorimi kasutamiseks me peame teada koordinaadi ja kiiruse väärtuste alg ajahetkel $x(0)$ ja $v(0)$ aga kiirenduse arvutame üleval valemiga.

II. RKF45 meetod.

Nüüd proovime realiseerida seda planni Fortrani ja Matlabi koodis. FORTRANI kood (kasutame rkf45 alamprogrammi).

Alguses on väike seletus. Diferentsiaalvõrrand mille me peame integreerida välja näeb järmist:

$$\ddot{x} = -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g \cdot V_{keha}}{m}, \text{ see on teist järku diferentsiaalvõrrand, kuid alamprogrammiga}$$

rkf45 saab integreerida ainult esimest järku diferentsiaalvõrrandi süsteemi. Meie puhul kasutame kahte parameetrit mille väärtused kasutatakse keha liikumise kirjeldamiseks, see on keha koordinaat "x" ja kiirus " $v=v_x$ ". Ühe teist järku võrrandi asemel meil on kaks esimest järku diffvõrrandi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g \cdot V_{keha}}{m} \end{aligned}$$

Alustame RKF45 fortrani programmi sisend ja väljund parameetrite kirjeldamist.

rkf45(func,neqn,y,t,tout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)

func – Alamprogrammi nime tuletiste arvutamiseks, meie puhul $\dot{x}$ ja $\dot{v}_x$. Teiste sõnadega siin me peame realiseerida üleval kirjutatud diferentsiaalvõrrandid

neqn – Võrrandite arv, meie juhul see on 2.

y – Ühemõõtmeline massiiv pikkusega "neqn", meie juhul see on 2.

Fortrani koodis see masiiv kirejeldatakse nii: **real y(2).**

Samal ajal massiiv y(2) kasutatakse arvutatud parameetrite väärtuste salvestamiseks, meie juhul koordinaadi ja kiiruse väärtused. Lepime kokku et hoiame koordinaadi väärtuse massiivis esimesel kohal ja kiirust teisel kohal. Test sõnaga y(1)=x ja y(2)= v_x .

t- ajaväärtus antud ajahetkel

tout- ajaväärtus järgmisel ajahetkel **tout=t+dt**, siin **dt** - ajasamm

relerr - suhtlline viga

abserr - absoluutne viga

iflag - kasutatakse arvutamise protsessi juhtimiseks (algne väärtus on 1)

work- reaali töomassiiv pikkusega 6*neqn+3, meie juhul 15.

iwork - täisarvuline töomassiiv fikseeritud pikusega 5.

4.2 Kood

Nüüd proovime realiseerida seda plaani Fortrani ja Pythoni koodis.

Koodi leiate siin:

http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPNM/Loengud/nadal_4/ Fortran/dim1_euler.f90
Fortran/dim1_rkf45_v1.f90
Fortran/dim1_rkf45_v2.f90
Fortran/dim1_rkf45_v3.f90
Fortran/plot_v1.py
Fortran/plot_v2.py
Fortran/srkf45.for
Python/5.2d_v1.py
Python/5.2d_v2.py

4.3 Ülesanded:

1. Alguses asub pall maapinnal. Algkiirus on 0.

- a) Mis kõrguseni ta tõuseb?
 - b) Mis kõrguseni ta tõuseb Marsil, Veenusel ja miks ?
 - c) Millise kiirendusega pall liigub kõrgeimas punktis ?
- NB! keha on pall massiga 1 kg ja raadiusega 1,8 m.

2. Alguses pall asub liikumatult kõrgusel 10 km.

- a) Mis kiirusega ja kiirendusega ta kukub Maapinnale (Palli lõppkiirus ja lõppkiirendus)?
 - b) Kui suur hõõrdejõud mõjub pallile kõrgusel 5 km ja mis kiirendusega ta liigub?
 - c) Mis toimub sama palliga Marsil?
- NB! keha on pall massiga 10 kg ja raadiusega 10 cm.

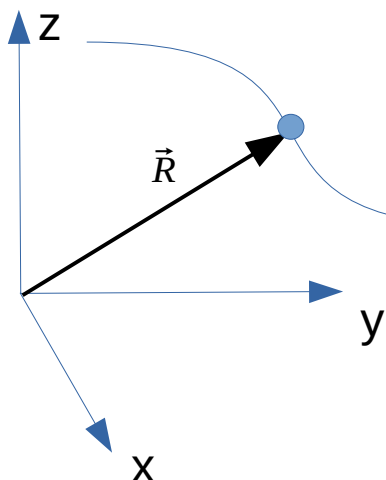
3. Pall viisatud ülesse algkiirusega 10 m/s. Mis kõrguseni ta tõuseb Veenusel ja Marsil?

NB! keha on pall massiga 10 kg ja raadiusega 10 cm.

Lisa 1 Mõned mõisted mehaanikast

Liikuv keha kirjeldab kõverat, mida nimetatakse keha trajektooriaks. Klassikalises mehaanikas määrab keha positsiooni asukohavektor või raadiusevektor $\vec{R}(t)$.

Vektoreid kolmemõõtmelises ruumis saab esitada järgmiselt, sõltumata sellest kas see on raadius-vektor:



$$\vec{R} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

keha kiiruse vektor:

$$\vec{v} = v_x(t) \cdot \vec{i} + v_y(t) \cdot \vec{j} + v_z(t) \cdot \vec{k}$$

või kiirenduse vektor:

$$\vec{a} = a_x(t) \cdot \vec{i} + a_y(t) \cdot \vec{j} + a_z(t) \cdot \vec{k}$$

Klassikalise mehaanika põhiülesanne on keha koordinaatide arvutamine erinevatel ajamomentidel et oleks võimalik keha liikumise kirjeldada. Aga mis parameetrid kirjeldavad keha liikumist?

- 1.) Keha koordinnadid $x(t)$, $y(t)$, ja $z(t)$,
- 2.) keha kiirus ja
- 3.) kiirendus.

Siis tekib küsimus aga kuidas saab arvutada keha kiirust ja kiirendust? Vastus on lihtne. Kiirus - keha liikumise kiirus nätab seda kui kiiresti muutuvad keha koordinaadid. See on koordinaatide muutumise kiirus. Aga **matemaatika vaatenurgast** mingi funktsiooni muutumise kiirus see on antud funktsiooni tuletis aja järgi. See tähendab et raadius-vektor ja kiiruse vektor on seotud järgmiselt:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}}$$

ja kiirenduse jäoks:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{R}} .$$

Kiirendust saab arvutada ka teisiti, Newtoni seaduse abil.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Sageli on mõistlik kasutada arvutustes vektorite asemel vektorite koordinaate. Raadius-vektori , kiiruse vektori ja kiirenduse vektori koordinaadid on seotud järgmiselt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x & \dot{y} &= v_y & \dot{z} &= v_z \\ \ddot{x} = \dot{v}_x &= a_x = \frac{F_x}{m} & \ddot{y} = \dot{v}_y &= a_y = \frac{F_y}{m} & \ddot{z} = \dot{v}_z &= a_z = \frac{F_z}{m} \end{aligned}$$

Kuidas saab neid võrrandeid kasutada keha liikumise kirjeldamiseks? **Mehaanikas tehakse vastupidi**, kui kehale mõjuvad jõud on teada, siis antud diferentsiaalvõrrandite abil arvutatakse keha kiirus ja koordinaadid.

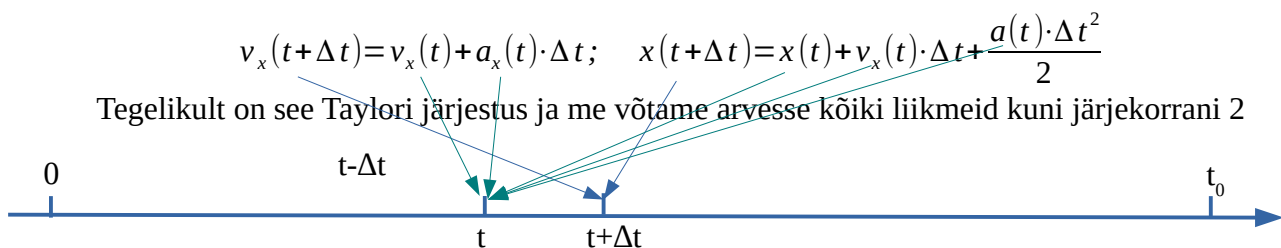
Vaatleme liht ülesanne. Eeldame, et keha liigub pideva kiirendusega ja liikumine on ühemõõtmeline. See tähendab, et keha liigub näiteks mööda x-telge. Keha liikumist kirjeldame matemaatiliselt. Me peame arvutada keha koordinaati sõltuvust ajast. See alusel saab otse arvutada kiirust ja kui on vaja, keha kiirendust (praeguses ülesandes eeldame, et kiirendus on antud parameeter).

Kuidas seda saab teha? Standardne koordinaati ja kiiruse seos annab teist järku diferentsiaalvõrrandi mille vaja integreerida kaks korda koordinnati saamiseks.

$$v_x(t) = \pm v_{0x} \pm a_x \cdot t; \quad x(t) = x_0 \pm v_{0x} \cdot t \pm \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

See on üleva diferentsiaalvõrrandi täpne lahendus, kuid seda pole alati võimalik analüütiliselt lahendada. Kui ei saa analüütiliselt siis saab arvutiga numbriliselt .

Mis siis, kui kehale mõjuv jõud ehl keha kiirendus sõltub ajast? Siis saab diferentsiaalvõrrandi arvuliselt lahendada järgmiselt. Kui tahame arvutada keha koordinaadid ja kiiruse ajavahemikus 0 kuni t_0 ajasammuga Δt siis saab kasutada eelmised valemid aga enne seda me peame neid natuke parandada.



Võtame need parameetrid eelmise ajasammui lõpp-punktist. Kiirendust arvutame Newtoni seadusega. Teisisõnu eeldame, et ajasamm on piisavalt väike, et arvestada kiirendust konstandseks. Seda meetodi absoluutne viga on arvutatakse valemiga:

$$\frac{\dot{F}(t) \Delta t^3}{6m}$$

Selge et selle meetodi täpsu suurem kui väiksem on ajasamm. Meetod töötab **paremini**, kui väiksem on ajasamm.