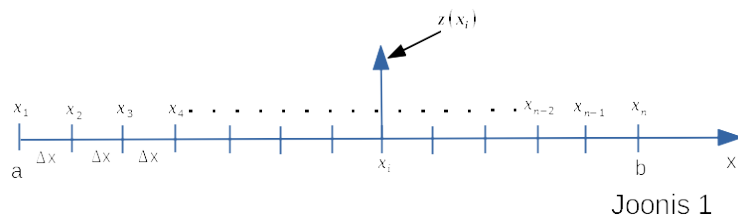


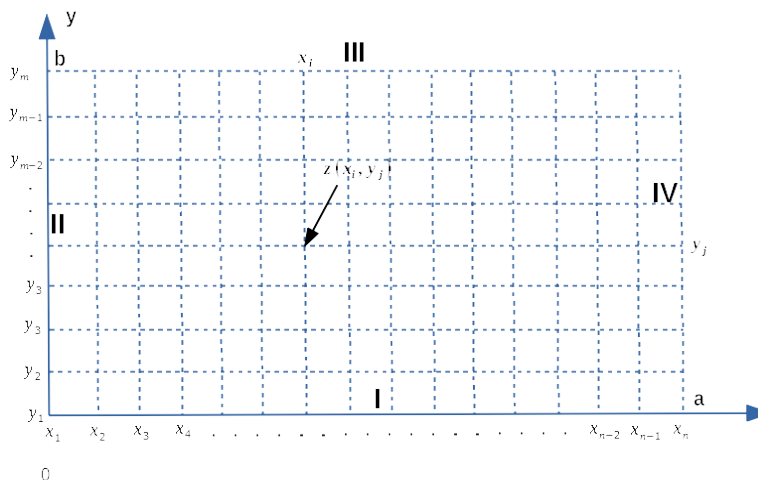
16. Lained.

16.1 1d ülesanne. Nööri võnkumised.

16.2 Teoreetilised alused



Joonis 1



Joonis 2

Modelleerida ühenõõtmelise nööri võnkumine (vaata joonist 1). Selle jaoks on vaja arvutada nööri nihke tasakaaluasendist, erinevates punktides ja erinevatel ajamomentidel $z(x,t)$. $z(x,t)$ sõltub kahest parameetrist, koordinaadist ja ajast. Antud funktsiooni arvutamiseks on vaja integreerida järgmist diferentsiaalvõrrandi (laine võrrandi):

$$\frac{dz(x,t)}{dt} = v^2 \cdot \frac{d^2 z(x,t)}{dx^2}, \quad v\text{-laine kiirus.}$$

Teeme seda numbriliselt. On selge, et sel juhul on vaja funktsiooni $z(x,t)$ arvutada diskreetselt, mingi koordinaatsammuga Δx ja aja sammuga Δt . Teisisõnu, kui funktsiooni väärtus kõigis punktides ajahetkel t on teada, siis diferentsiaalvõrrandiga saab funktsiooni arvutada järgmisel ajahetkel $t+\Delta t$ samades punktides. Alustame sellest et proovime diskretiseerida diferentsiaalvõrrandi (vaata joonist

1). Kasutame tuletise definitsiooni, siis:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z(x,t)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dz(x,t)}{dx} \quad \text{edasi asendame } \frac{dz}{dx} = z' \text{ siis} \\ \frac{dz'(x,t)}{dx} &\approx \frac{\Delta z'}{\Delta x} = \frac{z'(x+\Delta x, t) - z'(x, t)}{\Delta x} = \frac{z'(x+\Delta x, t)}{\Delta x} - \frac{z'(x, t)}{\Delta x} \end{aligned}$$

arvutame viimased avaldised eraldi:

$$\frac{z'(x+\Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{z(x+2\Delta x, t) - z(x+\Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad \text{ja} \quad \frac{z'(x, t)}{\Delta x} = \frac{z(x+\Delta x, t) - z(x, t)}{\Delta x^2}$$

pärast valemite kombineerimist saame:

$$\frac{d^2 z(x,t)}{dx^2} \approx \frac{z(x+2\Delta x, t) - 2 \cdot z(x+\Delta x, t) + z(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2} = \frac{z(x+\Delta x, t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2}.$$

Aja tuletise saab esitada samal viisil:

$$\frac{d^2 z(x,t)}{dt^2} \approx \frac{z(x+2\Delta t, t) - 2 \cdot z(x+\Delta t, t) + z(x, t)}{\Delta t^2} = \frac{z(x+\Delta t, t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x-\Delta t, t)}{\Delta t^2}$$

siis terve diferentsiaal võrrand :

$$\frac{z(x, t + \Delta t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x, t - \Delta t))}{\Delta t^2} = v^2 \frac{z(x + \Delta x, t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x - \Delta x, t))}{\Delta x^2} \quad \text{pärast lihtsustamist saame:}$$

$$z(x, t + \Delta t) = 2 \cdot z(x, t) - z(x, t - \Delta t) + \left(\frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \cdot (z(x + \Delta x, t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x - \Delta x, t))$$

See on diskreetne lainevõrrand mille saab realiseerida Fortrani või Matlabi koodis. Loodus antud võrrandi on selline et alguses me peame:

1.) määrata algnihkete igas punktis algusaja hetkel – **algtingimused**

$$z(\forall x, t=0)$$

2.) nihked nööri otstes - **rajatingimused**

$z(x=a, t)$ ja $z(x=b, t)$ kui rea lõpu nihke on fikseeritud ja ei sõltu ajast, peame kirjeldama kahte parameetrit

$$z(x=a) \text{ ja } z(x=b) \quad .$$

16.3 Ülesanned

Kirjutame Fortrani programmi nööri võnkumise modelleerimiseks.

Eeldame et esimene ots asub nullis $a=0$ ja varda pikkus on 1m see tähendab et $b=1$.

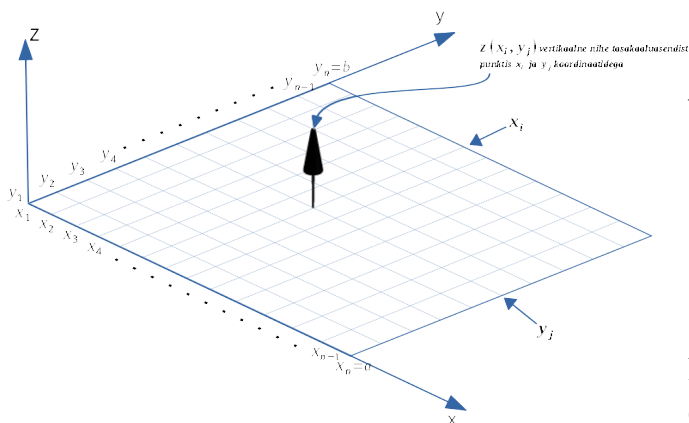
Ülesanne I.

a) Algtingimused - $z(x, t=0) = \begin{cases} 0.1 \text{ m, kui } x=0 \\ 0, \text{ kui } x>0 \end{cases}$

b) Rajatingimused - varra otstes $z(x=0)=0.1 \text{ m}, z(x=b)=0 \text{ K}$.

Ülesanne II.

Nelinurkse membraani võnkumine (joonis 2,3).



Kahemõõtmelise probleemi korral näeb diferentsiaalvõrrand välja järgmine:

$$\frac{d^2 z(x, y, t)}{dt^2} = v^2 \cdot \left(\frac{d^2 z(x, y, t)}{dx^2} + \frac{d^2 z(x, y, t)}{dy^2} \right)$$

On selge, et seljuhul funktsioon $T(x, y, t)$ sõltub kahest kordinaatidest ja ajast. Analoogiliselt seda võrrandi saab diskretiseerida, siis me saame:

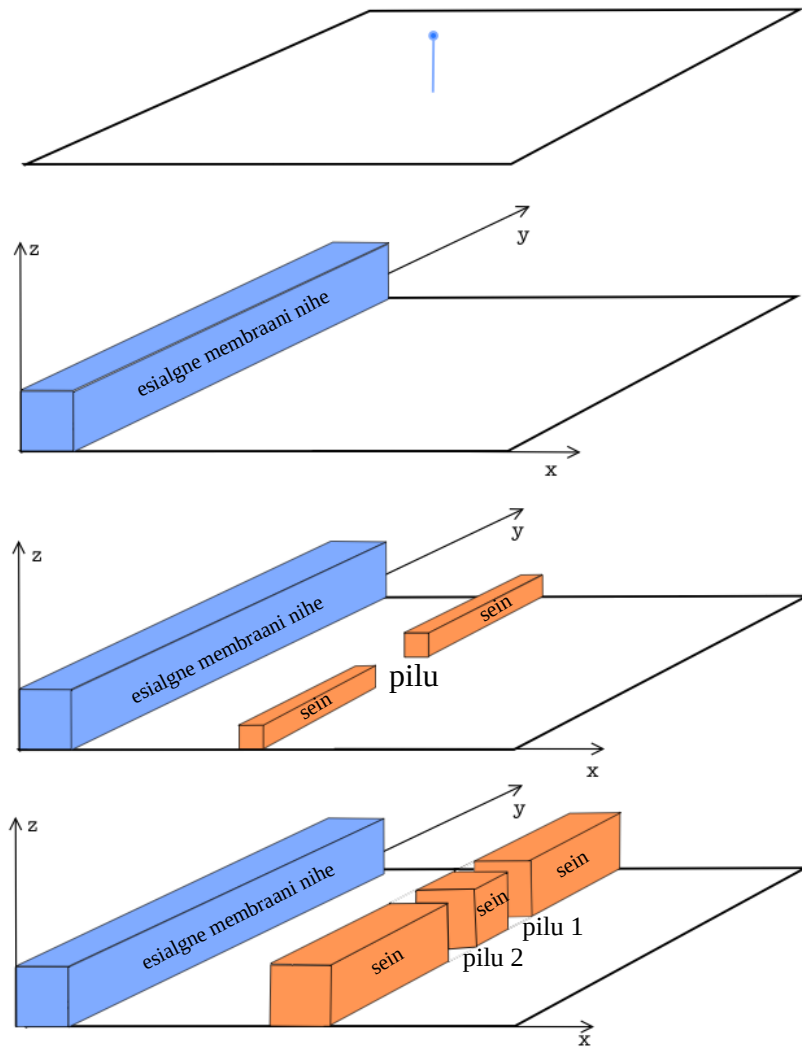
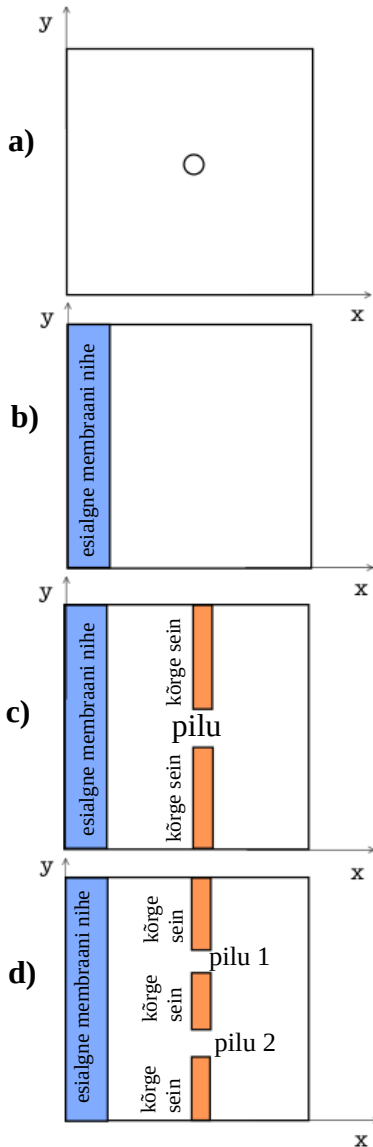
Joonis 3

$$z(x, y, t + \Delta t) = 2 \cdot z(x, y, t) - z(x, y, t - \Delta t) + \left(\frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \cdot (z(x + \Delta x, y, t) + z(x, y + \Delta y, t) - 4 \cdot z(x, t) + z(x - \Delta x, t) + z(x, y - \Delta y, t)) \quad .$$

Erinevad raja- ja algtingimused mille realiseeritud järgmistes programmides (valige ise konkreetsed numbrid):

- a) laine_punkt.f
- b) laine_trepp.f
- c) laine_difr.f
- d) laine_inter.f

Algtingimused



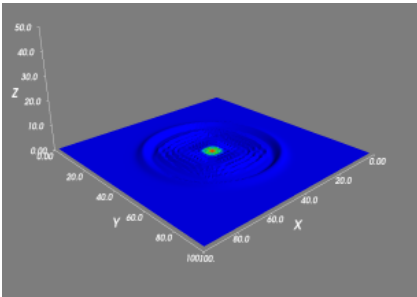
Visualiseerimiseks kasutatud järgmised Pythoni programmid:

/home/misha/teach/2022s/Lectures_correction/FPNM_yfx0310/nadal_16/Fortran/

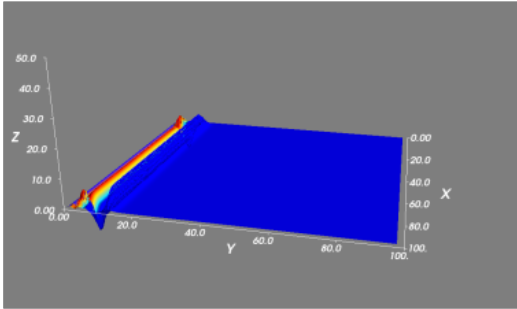
visual_mayavi.py

visual_mayavi_anim.py

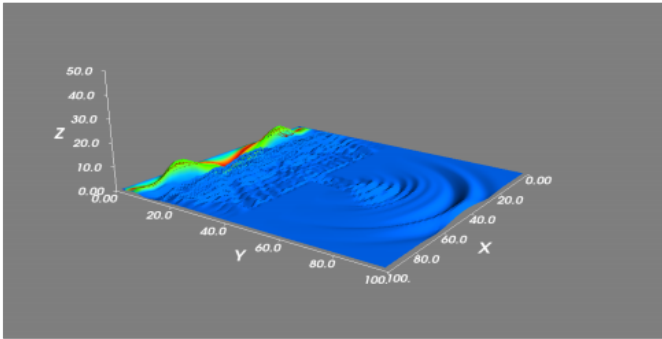
Visualiseerimise tulemused :



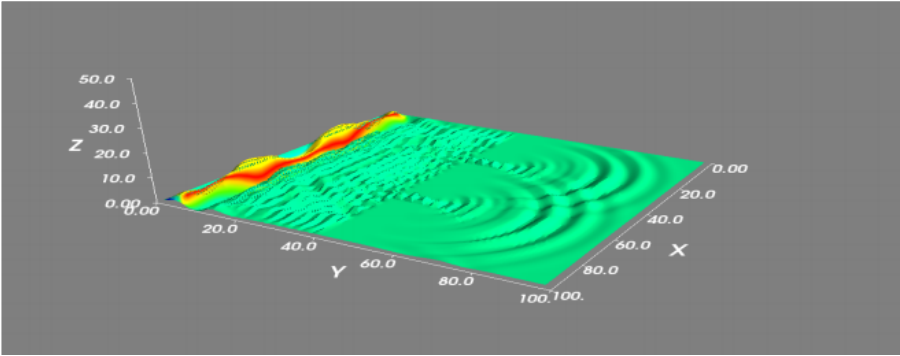
a)



b)



c)



d)