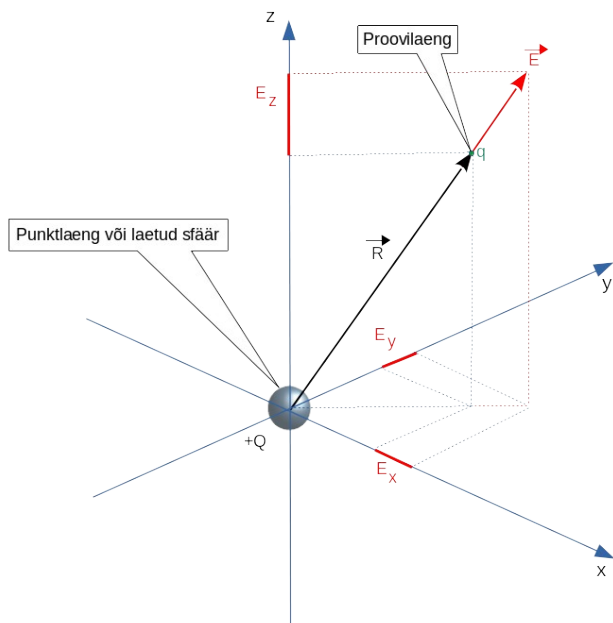


15. Elektrostaatiline väli II.

15.1 Teoreetilised alused



Joonis 1

Laetud keha (laeng $Q[C]$) loob enda ümber elektrivälja. Elektrivälja omadused iseloomustavad järgmised parameetrid: elektrivälja tugevuse vektor $\vec{E}$ [V/m] ja elektrivälja potentsiaal φ [V]. Proovilaengule q mõjuva elektrostaatilise jõu suurus arvutatakse valemiga $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Proovilaengu potentsiaalne energia arvutatakse analoogiliselt $E_{pot} = q \cdot \varphi [J]$.

Kahe punktilaengu vahelise jõu väärtus arvutame Coulombi seaduse abil:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{R^3} \cdot \vec{R} = q \cdot \vec{E}.$$

Siis q laengu elektrivälja tugevuse vektor arvutatakse nii (vaata joonist 1):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \vec{R}.$$

Põhilised parameetrid $\vec{E}$ ja φ seotud omavahel nii: $\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\hat{\nabla} \varphi$ kus gradiendi operaator: $\text{grad} = \hat{\nabla} = \frac{d}{dx} \cdot \vec{i} + \frac{d}{dy} \cdot \vec{j} + \frac{d}{dz} \cdot \vec{k}$ ja meie juhul $\vec{E} = \text{grad } \varphi = \hat{\nabla} \varphi = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \vec{k}$.

Potentsiaali sõltuvuse saab arvutada võrrandist $\vec{E} = -\hat{\nabla} \varphi$ kui me eeldame et ülesanne omab sfäärilist sümmeetriat ja parameetrid $\vec{E}$ ja φ sõltuvad ainult asukohavektorist $\vec{R}$. Kui kasutame gradiendi operaatorit saitist [https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates] siis diferentsiaalvõrrandi punktilaengu potentsiaali arvutamiseks $\frac{d\varphi}{dR} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$ ja $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \vec{R} \text{ -punktilaengu elektriväljatugevus}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} \text{ -punktilaengu elektrivälja potentsiaal.}$$

Tuletan meelde et antud valemid saab kasutada alles punktilaengu elektrivälja kirjeldada!

Pideva laengu jaotuse (üldine ülesanne) elektrivälja tugevuse vektor välja näeb nii:

$\text{div } \vec{E} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$ siin $\rho(\vec{r})$ - laengu jaotuse funktsioon, näiteks kui laetud keha on sfääri radiusiga R_0 siis

$\rho = \begin{cases} \rho_0, & \text{kui } R \leq R_0 \\ 0, & \text{kui } R > R_0 \end{cases}$. div - see on uus operaator nii et $\text{div } \vec{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz}$. Kui võtame arvesse et

$\vec{E} = \hat{\nabla} \varphi$ siis $\text{div grad } \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ja lõpus $\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Nii et meil on kaks võrrandit elektrivälja omaduste arvutamiseks:

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{- arvutame potentsiaali väärtuse (Laplasi võrrand)}$$

$\vec{E} = \widehat{\nabla} \varphi$ -arvutatakse elektrivälja tugevus, ja selle alusel:

$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ proovilaengule mõjuva jõud ja proovilaengu potentsiaalse energiat: $E_{pot} = q \cdot \varphi$.

Me eeldame et laengu jaotus $\rho(x, y, z)$ on teatud funktsioon. Selle alusel proovime arvutada φ erinevates punktides. See nõuab järgmise võrrandi lahendamist (eeldame et ülesanne ühemõõtmiline):

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}.$$

Nüüd eeldame et φ sõltub ajast (tegelikult see ei ole nii) ja kujutame seda võrrandi teises formaadis:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \right) \quad \text{ja võrdleme soojusliikumise võrrandiga}$$

$$\frac{dT(x, y, t)}{dt} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2 T(x, y, t)}{dx^2} + \frac{d^2 T(x, y, t)}{dy^2} \right).$$

Nagu näha neid on praktiliselt samad. Kui modelleerimise aeg on lõpmata pikk siis tekib statsionaarne lahend, temperatuur enam ei sõltu ajast ja temperatuuri jaotuse funktsioon vastab võrrandile

$$0 = \alpha \cdot \left(\frac{d^2 T(x, y, t)}{dx^2} + \frac{d^2 T(x, y, t)}{dy^2} \right).$$

Oletame, et potentsiaal sõltub ajast ja integreerime nüüd modifitseeritud Laplace'i võrrandi, kuni saame statsionaarse lahenduse. Kui kaua aega on vaja ootama? Kuidas seda kriteerium on välja näeb?

Näiteks lõpetame integreerimist kui $\left| \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\varphi(t)} \right| \leq 10^{-5}$.

Modifitseeritud Laplasi võrrandi $\frac{d\varphi}{dt} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \right)$ saab kujutada nii:

$$\varphi(x, y, t + \Delta t) = \varphi(x, y, t) + \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) \cdot \left(\varphi(x + \Delta x, y, t) + \varphi(x, y + \Delta y, t) - 4 \cdot \varphi(x, y, t) + \varphi(x - \Delta x, t) + \varphi(x, y - \Delta y, t) + \frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0} \right)$$

15.2 Ülesanded:

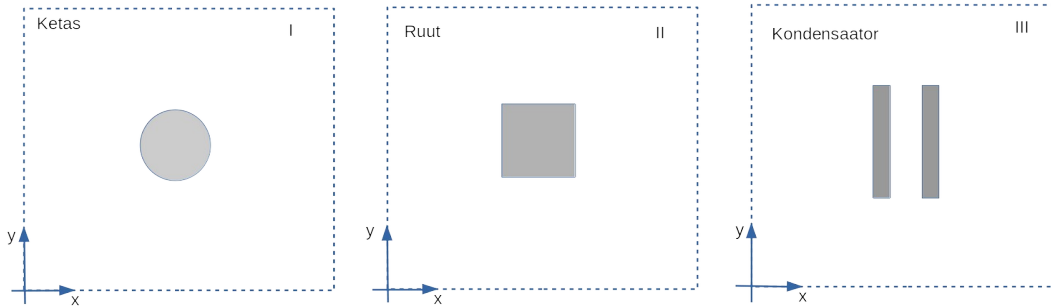
Vaatleme järgmised ülesanded:

Ia-laetud dielektriline ketas

I-laetud metalli ketas

II- laetud metalli ruutplaat,

III- kondensaator (üks plaat on laetud positiivseks aga teine negatiivseks).



Kood realiseeritud programmides:

e_4n_m.f90 - laetud metalli ruutplaat

e_cond_m.f90 - kondensaator

e_ring_d.f90 - laetud dielektriline ketas

e_ring_m.f90 - laetud metalli ketas

elekter_visual_mayavi.py - Pythoni programm tulemuste visualiseerimiseks (kasutab MajaVi Pythoni moodulit)