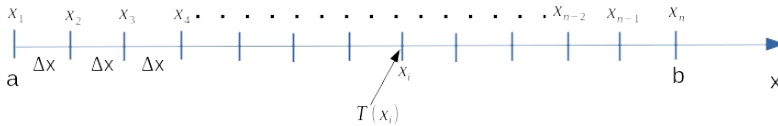


14. Soojusjuhtivus.

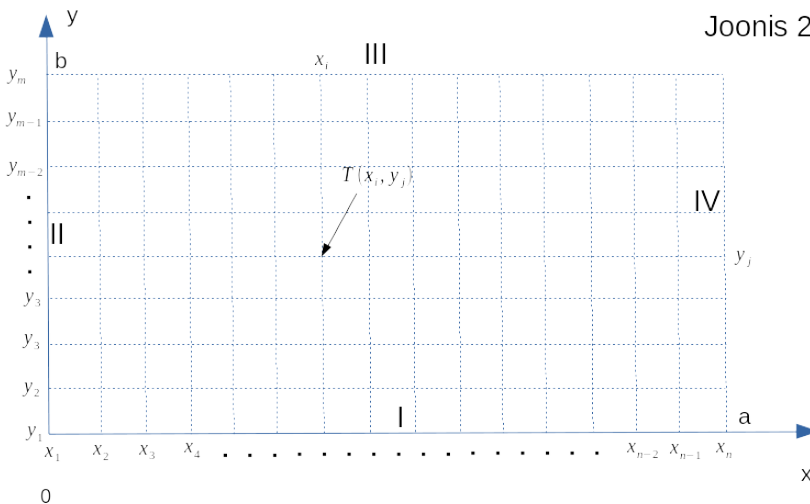
14.1 1d ülesanne.

14.1.1 Teoreetilised alused

Joonis 1



Joonis 2



Meile on vaja arvutada temperatuuri jaotuse varra sees. Selle jaoks on vaja arvutada temperatuuri väärtuste varras erinevates punktides ja erinevates ajamomentides $T(x,t)$. $T(x,t)$ sõltub kahest parameetrist, koordinaadist ja ajast. Antud funktsioon arvutamiseks on vaja integreerida järgmist diferentsiaalvõrrandi (soojusjuhtivuse võrrand):

$$\frac{dT(x,t)}{dt} = \alpha \cdot \frac{d^2 T(x,t)}{dx^2}, \quad \alpha \text{ soojusjuhtivuse}$$

tegur.

Teeme seda numbriliselt. On selge, et sel juhul saab funktsiooni $T(x,t)$ arvutada ainult diskreetselt mõne koordinaatsammu Δx ja aja astme Δt abil. Teisisõnu, kui funktsiooni väärtus kõigis punktides ajahetkel t on teada, siis diferentsiaalvõrrandi saab funktsiooni arvutada järgmisel ajahetkel samades punktides. Alustame sellest et proovime diskretiseerida diferentsiaalvõrrandi (vaata joonist 1). Kasutame

tuletise definitsiooni siis:

$$\frac{dT(x,t)}{dt} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T(x,t)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dT(x,t)}{dx} \text{ edasi asendame } \frac{dT}{dx} = T' \text{ siis} \\ \frac{dT'(x,t)}{dx} &\approx \frac{\Delta T'}{\Delta x} = \frac{T'(x+\Delta x,t) - T'(x,t)}{\Delta x} = \frac{T'(x+\Delta x,t)}{\Delta x} - \frac{T'(x,t)}{\Delta x} \end{aligned}$$

arvutame viimased avaldised eraldi

$$\frac{T'(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = \frac{T(x+2\Delta x,t) - T(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2} \quad \text{ja} \quad \frac{T'(x,t)}{\Delta x} = \frac{T(x+\Delta x,t) - T(x,t)}{\Delta x^2}$$

kui kombineerime kõik valemid siis:

$$\frac{d^2 T(x,t)}{dx^2} \approx \frac{T(x+2\Delta x,t) - 2 \cdot T(x+\Delta x,t) + T(x,t)}{\Delta x^2} = \frac{T(x+\Delta x,t) - 2 \cdot T(x,t) + T(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} \quad \text{ja}$$

diferentsiaal võrrand:

$$\frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} = \alpha \frac{T(x+\Delta x,t) - 2 \cdot T(x,t) + T(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} \quad \text{lihtsustamise pärast me saame:}$$

$$T(x,t+\Delta t) = T(x,t) + \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) \cdot (T(x+\Delta x,t) - 2 \cdot T(x,t) + T(x-\Delta x,t))$$

Koordinaatide asemel saab kasutada sõlmede numbreid ($x \rightarrow i$):

$$T_i(t + \Delta t) = T_i(t) + \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) \cdot (T_{i+1}(t) - 2 \cdot T_i(t) + T_{i-1}(t))$$

See on diskreetne soojusliikumise võrrand mille saab realiseerida Fortrani või Pythoni koodis. Loodus antud võrrandi on selline et alguses me peame:

1.) määrata temperatuuri väärtused igas punktis alguses ($t=0$) – see on nn **algtingimus** $T(\forall x, t=0)$

2.) Temperatuuri väärtused varra otstes - **rajatingimused**

Me peame määrata $T(x=a, t)$ ja $T(x=b, t)$. Kui varra otstes temperatuurid fikseeritud ja ei sõltu ajast siis on vaja määrata ainult kaks parameetrid $T(x=a)$ ja $T(x=b)$.

14.1.2 Ülesanne

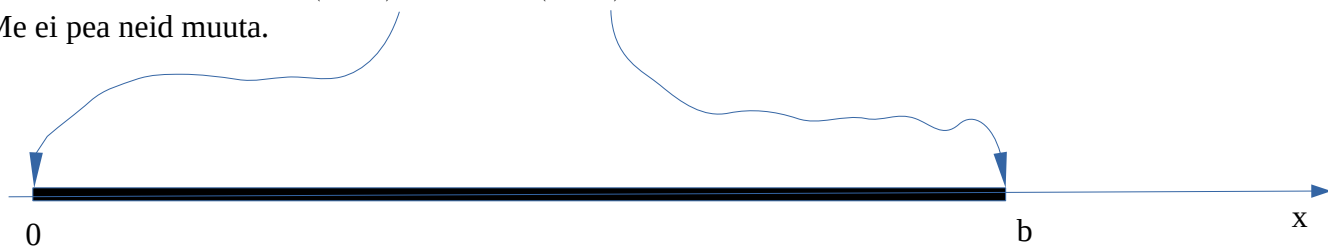
Ülesanne 1.1

Kirjutame Fortrani programmi soojusliikumise modelleermiseks varra sees.

Eeldame et esimene ots asub nullis $a=0$ ja varra pikkus on 1m see tähendab et $b=1$.

a) **Algtingimused** - $T(x, t=0) = \begin{cases} 100, & \text{kui } x=0 \\ 0, & \text{kui } x>0 \end{cases}$

b) **Rajatingimused** - varra otstes $T(x=0) = 100 \text{ K}$, $T(x=b) = 0 \text{ K}$. Nendes punktides on temperatuur fikseeritud. Me ei pea neid muuta.



Kood on realiseeritud programmis **Fortran/soojus1d.f90**

14.2 2d ülesanne (vt. joonis 2).

14.2.1 Teoreetilised alused.

Kahemõõtmelise probleemi korral näeb diferentsiaalvõrrand välja järgmine:

$$\frac{dT(x, y, t)}{dt} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2 T(x, y, t)}{dx^2} + \frac{d^2 T(x, y, t)}{dy^2} \right)$$

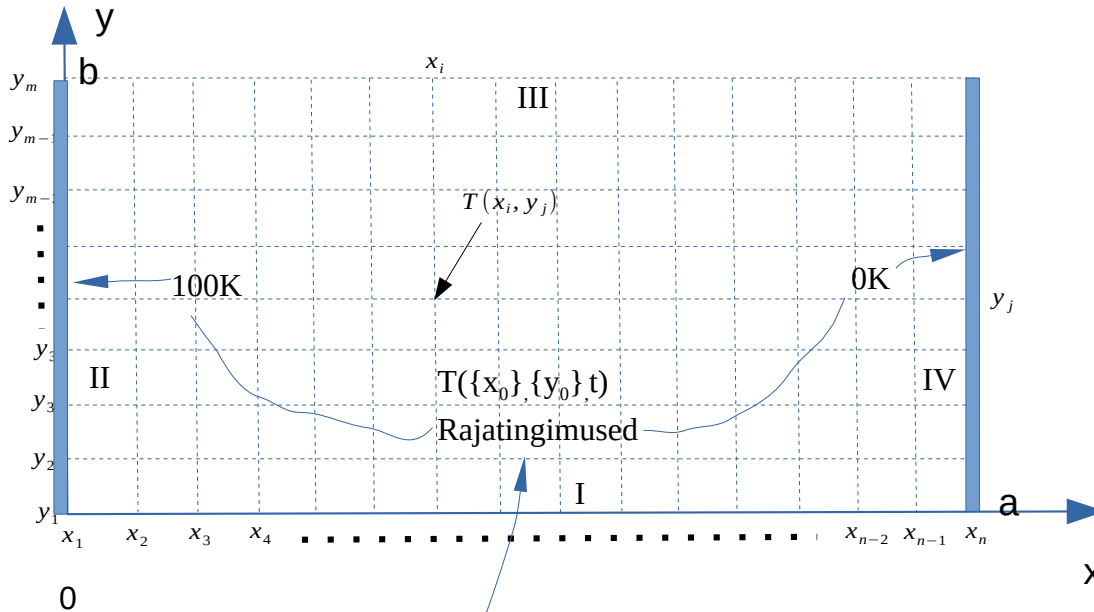
On selge, et seljuhul funktsioon $T(x, y, t)$ sõltub kahest kordinaatidest ja ajast. Analoogiliselt seda võrrandi saab diskretiseerida, siis me saame:

$$T(x, y, t + \Delta t) = T(x, y, t) + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \right) \cdot (T(x + \Delta x, y, t) + T(x, y + \Delta y, t) - 4 \cdot T(x, y, t) + T(x - \Delta x, y, t) + T(x, y - \Delta y, t))$$

Asendame sõlmede koordinaadid sõlmede numbritega:

$$T_{i,j}(t+\Delta t) = T_{i,j}(t) + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \right) \cdot (T_{i,j}(t) + T_{i,j+1}(t) - 4 \cdot T_{i,j}(t) + T_{i-1,j}(t) + T_{i,j-1}(t))$$

Ülesanne 2.1



Algtingimused:

$T(x, y, t=0) = f(x, y)$ – temperatuuri jaotus alg ajahetkel. Eeldame et algus kõikides punktides temperatuur 0K.

$T(x, y, t=0) = \begin{cases} 100, & \text{kui } x=0, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{teistes punktides} \end{cases}$ see tähendab et alg ajahetkel ($t=0$), I-l küljel $T=100K$. Kõikides teistes punktides $T=0K$.

Rajatingimused:

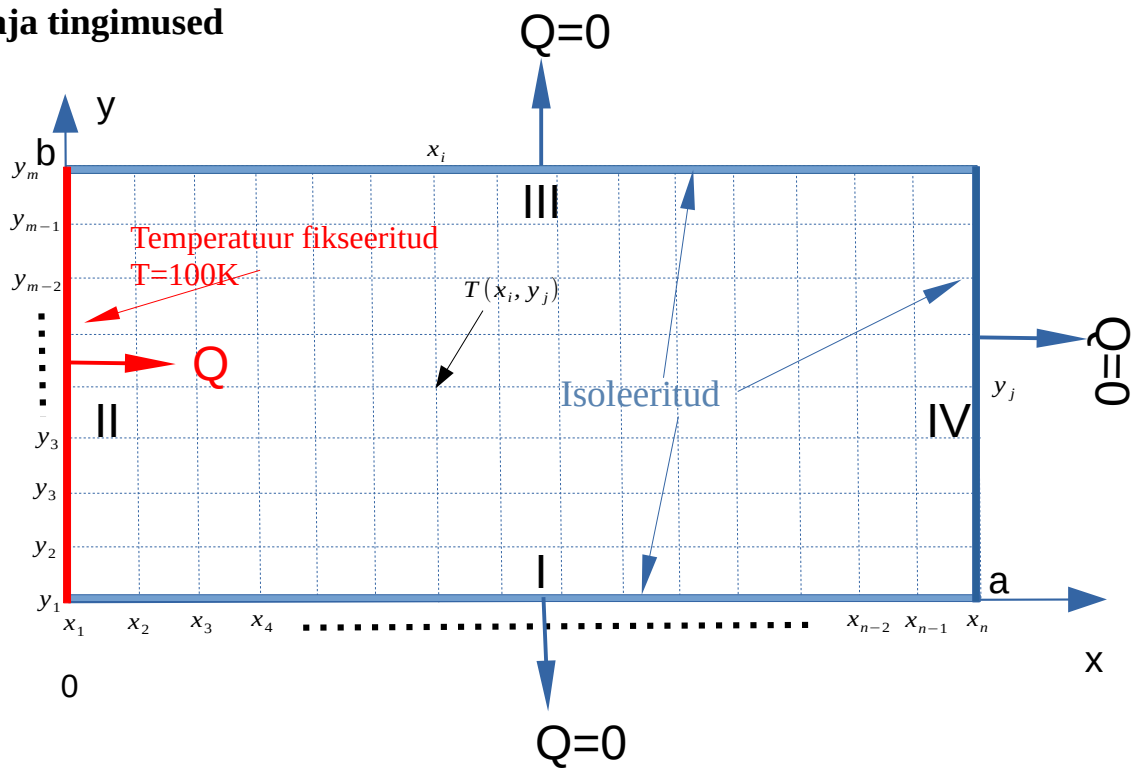
$T(\{x_0\}, \{y_0\}, t)$ – temperatuuri väärtused punktides fikseeritud koordinaatidega $\{x_0\}, \{y_0\}$.

Küljel II $T=100K$, küljel I, III, IV $T=0K$.

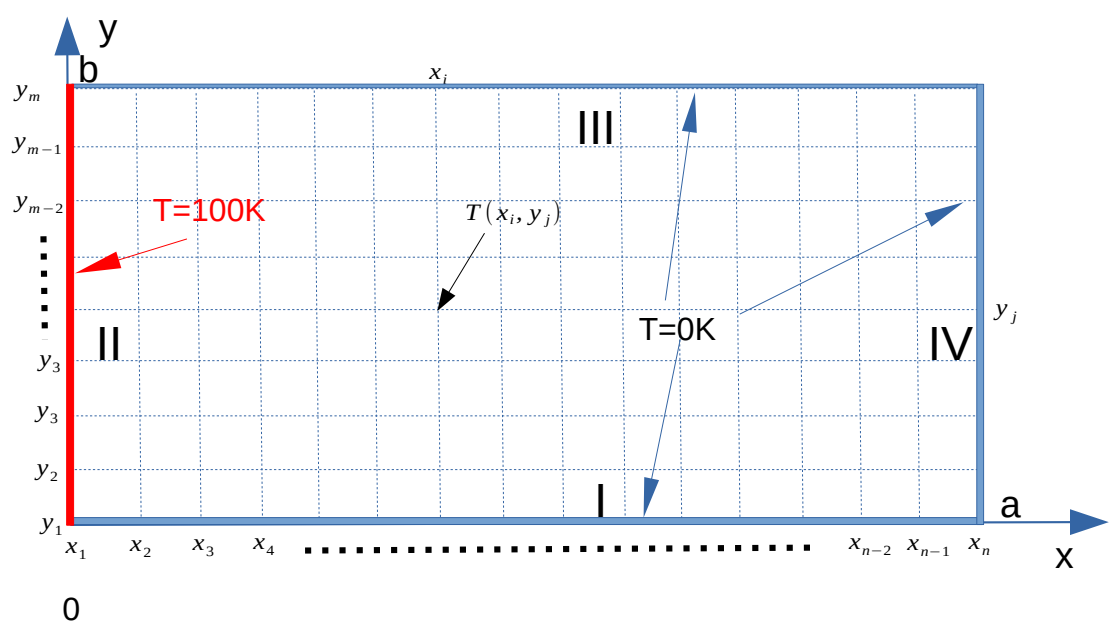
Seda variant on realiseeritud programmis **fortran/soojus2d_1.f90**

Ülesanne 2.2

Raja tingimused



Algingimused



Kui külg on isoleeritud, see tähendab et vastav tuletis on 0 ja soojus seina ei läbi. Külgedele I ja III vastutav tuletised on $\frac{dT(x,y)}{dy}|_{y=0} = \frac{dT(x,y)}{dy}|_{y=b} = 0$ ja külgedele IV $\frac{dT(x,y)}{dx}|_{x=a} = 0$. Seda võrrandid me peame diskretiseerida enne kasutamist. Kasutame selle jaoks tuletise difenitsioon.

Kuidas seda rajatingimused saab rakendada?

1. Me ei pea ümberarvutada temperatuurid küljel II. Antud punktides $T(y,x=0)$ alati võrdub 100K.

2. Küljel I (on isoleeritud) see tähendab et vastutav tuletis

$$\frac{dT(x,y)}{dy}|_{y=0, \forall x} = \frac{\Delta T(x,y)}{\Delta y} = \frac{T(x,y+\Delta y) - T(x,y)}{\Delta y} = 0 \Rightarrow T(x,y+\Delta y) - T(x,y) = 0 \Rightarrow T(x,0,y) = T(x,\Delta y) \text{ või } T_{i,1} = T_{i,2}$$

Käljel III isoleeritud.

$$\frac{dT(x,y)}{dy}|_{y=b, \forall x} = \frac{\Delta T(x,y)}{\Delta y} = \frac{T(x,y+\Delta y) - T(x,y)}{\Delta y} = 0 \Rightarrow T(x,y+\Delta y) - T(x,y) = 0 \Rightarrow T(x,y) = T(x,\Delta y) \text{ või } T_{i,m} = T_{i,m-1}$$

Käljel IV isoleeritud siis analoogiliselt.

$$\frac{dT(x,y)}{dx}|_{x=a, \forall y} = \frac{\Delta T(x,y)}{\Delta x} = \frac{T(x+\Delta x,y) - T(x,y)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow T(x+\Delta x,y) - T(x,y) = 0 \Rightarrow T(a,y) = T(a-\Delta x,y) \text{ või } T_{n,j} = T_{n-1,j}$$

see tähendab et külgedel I,III ja IV temperatuurid saab arvutada valemiteaga

I $T_{i,1} = T_{i,2}$

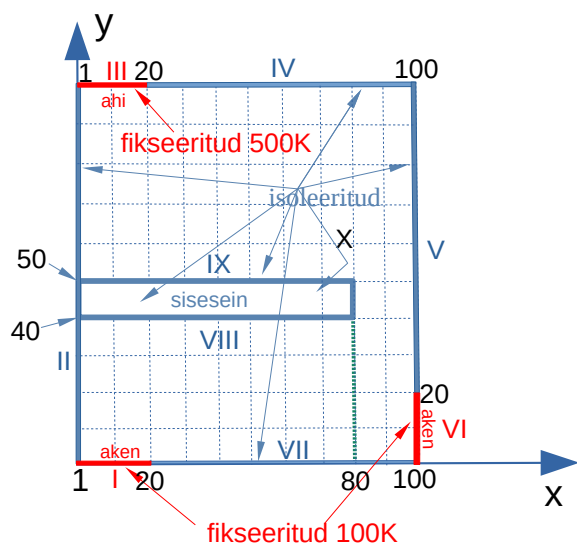
II $T_{1,j} = 100 \text{ K}$ temperatuur fikseeritud (100K peab olema pidevalt)

III $T_{i,m} = T_{i,m-1}$

IV $T_{n,j} = T_{n-1,j}$

Seda idee on rakendatud programmis **Fortran/soojus2d_2.f90**

Ülesanne 2.3



Kasutame järgmised rajatingimused ja algtingimused (vt. Joonist).

Järgmised valemid näitavad, kuidas saab seinte temperatuuri arvutada (rakendades valitud piiritingimusi):

I - $T(1:20,1)=100$

II - $T(1,j)=T(2,j) \quad j=1:100$

III - $T(1:20,100)=500$

IV - $T(i,100)=T(i,99) \quad i=20:100$

V - $T(100,j)=T(99,j) \quad j=20:100$

VI - $T(100,1:20)=100$

VII - $T(i,1)=T(i,2) \quad i=20:100$

VIII - $T(i,40)=T(i,39) \quad i=1:80$

IX - $T(i,50)=T(i,51) \quad i=1:80$

X - $T(80,j)=T(81,j) \quad j=40:50$

Ja kõikides teistes punktides algtemperatuur võrdub 0K

Seda ülesanne realiseeritud programmis **Fortran/soojus2d_3.f90**

2D ülesannete visualiseerimiseks kasutage *pythoni koodi*:

soojus_visual_mayavi.py

soojus_visual_mayavi_anim.py - animatsiooni loomiseks

Kasutatakse Pythoni moodul Mayavi. Kuid see moodul tuleb installida, seda saab teha käsureale sisestades:

pip install PyQt5 mayavi