

5. Keha kahemõõtmelise languvuse Maa gravitatsiooniväljas.

5.1 Teoreetilised alused

Keha paisatud algkiirusega V horisondi nurga all. Me peame vastata järgmistele küsimustele:

1. Kuidas keha koordinaadid $x(t), y(t)$ ja kiiruse projektsioonid $v_x(t)$ ja $v_y(t)$ sõltuvad ajast.
2. Arvutame keha kineetilise, potentsiaalse ja kogu eneeiad eninevates aja momentides.

Võtame arvesse kõik kehale mõjuvad jõud - gravitatsiooni jõud, Archimedese jõud ja takistus jõud.

a) Gravitatsiooni jõud (joonis 1)

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r}, \text{ siin}$$

$G = 6.67408 \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ -gravitatsiooni konstant, $M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ -Maa mass, $R_M = 6378 \text{ km}$ - Maa raadius, h - trajektoori kõrgus.

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M \vec{+} h) = -m \cdot \left(G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M \vec{+} h) \right) = m \cdot \vec{g},$$

siin g -raskuse kiirendus mille väärtus sõltub kõrgust:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M \vec{+} h) \text{ või absoluutne väärtus}$$

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^2}$$

Kui $h \ll R_M$ siis $g(h=0) = \frac{G \cdot M}{R_M^2} = 9.814 \text{ m/s}^2$ -gravitatsiooni kiirendus Maa pinnal (vaadake eelmises loengus).

b) Takistusjõud.

Joonis 1 Kasutame hästi teatud valemite:

$$\vec{F}_{tak} = -0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v}$$

antud valemis:

C - aerodünaamiline tegur,

ρ_{atm} - atmosfääri tihedus (üldiselt sõltub kõrgust)

$\vec{v}$ - keha kiirus õhu suhtes,

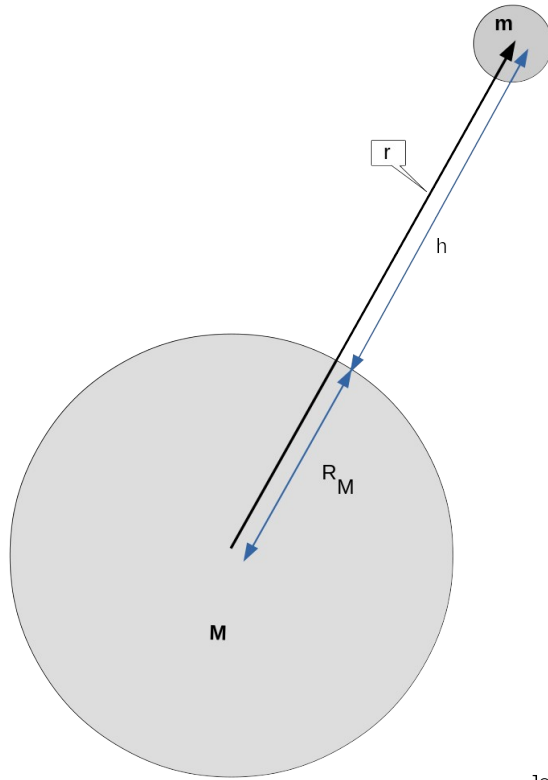
S - keha ristlõike pindala

Atmosfääri tiheduse sõltuvuse kõrgust saab arvutada järmistel viisil:

1. Baromeetriline valemiga:

$$\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu g(h)}{R \cdot T} h} \quad \begin{aligned} \mu &= 29 \text{ kg/kmool} \\ R &= 8310 \text{ J/kmool K} \\ T &= 293 \text{ K} \end{aligned}$$

Tekib küsimus kuidas arvutada atmosfääri tihedust Maa pinnal. Selle jaoks saab jälle kasutada ideaalse gaasi olekuvõrrandi:



$$PV_{gaas} = \frac{m_{gaas}}{\mu_{gaas}} RT \quad \text{avalame tihedust} \quad \rho_0 = \frac{m_{gaas}}{V_{gaas}} = \frac{P \mu_{gaas}}{RT}, \text{ siin } P - \text{gaasi rõhk.}$$

2. Kasutame standardse atmosfääri omaduste kirjeldavaid programme (Kirjutatud C, Fortranis, Pythonis või Matlabis).

3. Saab kasutada atmosfääri tiheduse mõõtmise tulemusi (näiteks meteosondiga).

Oma programmides kasutame meetodit 1. Baromeetrilises valemis kasutame reaalseid atmosfääri parameetreid, meie puhul see on atmosfäärirõhk, temperatuur ja ühe kilomooli mass (peegeldab atmosfääri keemilist koostist). Järgnevalt kasutame eeldust, et atmosfäär on isothermiline (atmosfääri temperatuur ei sõltu kõrgusest, kuigi see pole nii: https://en.wikipedia.org/wiki/U.S._Standard_Atmosphere).

Arvatakse, et Maa atmosfääri piir asub kõrgusel 100 km (nn **Kármáni joon**). See tähendab, et meie mudelis võime eeldada, et gravitatsiooni kiirendus peaaegu ei sõltu kõrgusest sellepärast et Maa pinnal ja kõrgusel 100 km on kiirendus peaaegu sama. Tõestame seda, arvutame selle jaoks järgmise seose:

$$\frac{g(h)}{g(h=0)} = \left(1 + \frac{h}{R_{Maa}}\right)^2 \quad \text{Kõrgusel 100 km seda suhe võrdub 1.02. See tähendab, et meie mudelis on}$$

raskuskiirendus kõrgusest peaaegu ei sõltu (vahe on vaid 2%).

c) Archimedesese jõud

$$\vec{F}_{arhc} = \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha} \cdot \vec{i}$$

või

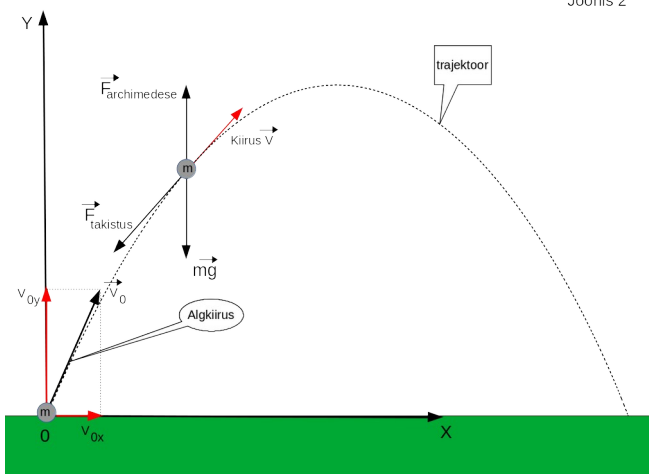
$$|\vec{F}_{arhc}| = \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha} \quad \text{siin}$$

$$V_{keha} - \text{keha rumala}, g(h) - \text{raskuse kiirendus}, \rho_{atm}(h) - \text{atmosfääri tihedus}$$

Nüüd arvutame keha koordinaati ja kiiruse sõltuvuste ajast. Selle jaoks on vaja integreerida differentiaali võrrandi (või differentiaali võrrandite süsteemi) mis annab meile teine Newtoni seadus (joonis 2).

Joonis 2

$$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{tak} + \vec{F}_{arch}$$



On mugavam kasutada vektorite asemel nende projektsioonid. Projitseerime kõik vektorid x ja y-telgidel ja arvestame et takistuse jõud ja kiiruse vektor on alati vastas suunatud. Kui koordinaadi teljed X, Y ja nulli punkt on valitud nagu joonisel siis: me saame kaks differentiaali võrrandi:

$$m \ddot{x} = -0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_x$$

$$m \ddot{y} = -m \cdot g - 0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_y + \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}$$

Jagame keha massiga siis saame:

$$\ddot{x} = -\frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_x}{m}$$

$$\ddot{y} = -g - \frac{(0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_y)}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}}{m}$$

kiiruse absoluut väärtus arvutatakse siis: $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Nagu eelmises loengus, eeldame et atmosfääri tihedus sõltub ainult kõrgusest (ja trajektoori kõrgus väiksem kui Maa raadius). Raskuse kiirendus jääb samaks.

Nüüd määrame mudeli parameetrid (eeldame et keha liigub Maapinna lähedal):

$g=9.814$ ja ei sõltu kõrgusest,

$r_{keha}=0.1$ m keha on pall raadiusega 10 cm,

$C=0.47$ palli jaoks 0.47 (https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient),

$m=0.2$ kg palli mass on 200g,

$g=9,814$ m/s² raskuse kiirendus. Kui keha trajektoori kõrgus >> kui Maa radius siis g ei sõltu kõrgusest.

5.2 Kood

Nüüd me peame integreerima järgmist diferentsiaalvõrrandid (liikumine on kahemõõtmeline):

$$\ddot{x} = -\frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_x}{m}$$

$$\ddot{y} = -g - \frac{(0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_y)}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}}{m}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Antud võrrandi lahendamiseks saab kasutada standartseid programme **rkf45**, **ode45** või mingeid teised programme mille saab leida saidil netlib.org. Kuid siin tõusetub jällegi probleem. **RKF45** alamprogrammi saab kasutada esimese astme diferentsiaalvõrrandite süsteemi integreerimiseks. Seda probleemi saab ära lahendada lisamuutujate kasutamisel. Klassikalises mehaanikas on teada et keha koordinaat $\mathbf{x}$, kiirus $\mathbf{v}$ ja kiirendus $\mathbf{a}$ on seotud järgmist:

$$v_x = \dot{x}, a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad \text{ja} \quad v_y = \dot{y}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}.$$

Seejärel saame analoogiliselt eelmist loenguga juba neli esimest järku diferentsiaalvõrrandid:

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_x = -\frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_x}{m}$$

$$\dot{v}_y = -g - \frac{(0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v_y)}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}}{m}$$

Selge et me peame teada koordinaadi ja kiiruse väärtuste alg ajahetkel $x(t=0)$, $y(t=0)$ ja $v_x(t=0)$, $v_y(t=0)$. Kiirenduse arvutame teatud valemitega.

Nüüd proovime realiseerida meie planni Fortrani ja Matlabi koodides ja kasutame diferentsiaal võrrandite integreerimiseks standartset programme.

RKF45 (realiseeritud Runge-Kutta-Fehlbergi metod) fortrani programmi sisend ja väljund parameetrite kirjeldus:

rkf45(func, neqn, y, t, tout, relerr, abserr, iflag, work, iwork)

func – Alamprogrammi nime tuletiste arvutamiseks, meie puhul $\dot{x}, \dot{y}$ ja $\dot{v}_x, \dot{v}_y$. Teiste sõnadega siin me peame realiseerida üleval kirjutatud diferentsiaalvõrrandid

neqn – Võrrandite arv, meie juhul see on 4.

- y** – Ühemõõtmeline massiiv pikkusega “neqn”, meie juhul see on 4.
 Fortrani koodis see masiiv kirejeldatakse nii: **real y(4)**.
 Samal ajal massiiv y(4) kasutatakse arvutatud parameetrite väärtuste salvestamiseks, meie juhul koordinaadi ja kiiruse väärtused. Lepime kokku et hoiame koordinaadi väärtuseid massiivi alguses ja kiirust masiivi lõpus. Test sõnaga $y(1)=x, y(2)=y$ ja $y(3)=V_x, y(4)=V_y$.
- t**- ajaväärtus antud ajahetkel
- tout**- ajaväärtus järgmisel ajahetkel **tout=t+dt**, siin **dt** - ajasamm
- relerr** - suhtlline viga
- abserr** - absoluutne viga
- iflag** - kasutatakse arvutamise protsessi juhtimiseks (algne väärtus on 1)
- work**- reaalarvuline töömassiiv pikkusega $6 \cdot neqn + 3$, meie juhul see on 27.
- iwork** - täisarvuline töömassiiv fikseeritud pikusega 5.

Programmid leiate kataloogidest Fortran ja Matlab siin: http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPM/Loengud/nadal_5/:

Fortrani kood, rkf45 alamprogrammi alusel.....	Fortran/dim2_rkf45_v1.f90 Fortran/dim2_rkf45_v2.f90 Fortran/dim2_rkf45_v3_tuul.f90 Fortran/dim2_rkf45_v4_tuul.f90
Matlabi kood tulemuste visualiseerimiseks.....	Fortran/plot_v1.m Fortran/plot_v2.m Fortran/plot_v3.m
Matlabi kood, ode45 alamprogrammi alusel.....	Matlab/dim2_45_ro.m Matlab/dim2_45_ro_quiver.m Matlab/mycheck.m

5.3 Ülesanded:

NB! Palli mass 3 kg ja raadius 10 cm

1. Alguses asub pall Maa maapinnal. Kiirusvektor (pikkusega 15 m/s) on orienteeritud horisondi suhtes 45 kraadise nurga all.

- Mis kõrguseni ta tõuseb?
- Mis kõrguseni ta tõuseb Marsil, Veenusel ja miks?
- Joonestage vektorid $\vec{a}, \vec{v}, \vec{F}_{\text{takistus}}$ ajahetkel 1 s Matlab programmiga "quiver".
- Arvutage palli kineetilise, potentsiaalse ja koguenergiad.
- Arvutage $\vec{F}_{\text{takistus}}$ jõutöö (NB! Kasutage energia jäävuse seaduse).

2. Kui me eeldame et puhub tuul kiirusega 5 m/s (paremalt vasakule).
 Kuidas seda saab arvestada meie programmides?