

4. Keha langemise (ühemõõtmeline) Maa gravitatsiooniväljas.

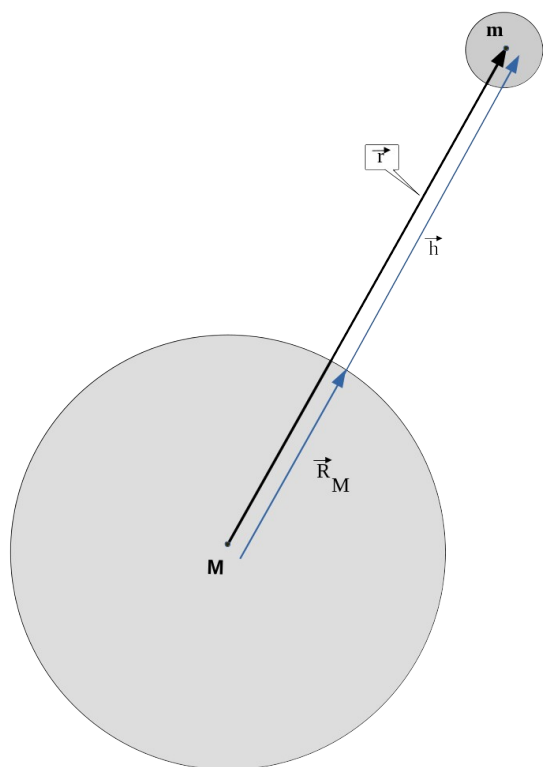
4.1 Teoreetilised alused

Eeldame et keha asub liikumatult kõrgusel **h** meetrid. Me peame arvutada järgmised keha liikumise kirjeldavad parameetrid:

- 1). Keha koordinaadi ja kiiruse sõltuvuse ajast (keha liigub planeedi atmosfääris).
- 2). Kineetilise, potentsiaalse ja kogu energiad erinevates aja momentides.

Võimalusel võtame arvesse kõiki kehale mõjuvaid jõude – gravitatsiooni jõudu, Archimedese jõudu (tõstejõud) ja hõõrdumist (tõmbejõud).

a) Gravitatsiooniline jõud (Kasutame klassikalist Newtoni gravitatsiooniseadust).



Joonis 1

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r} \quad , \text{ valemis:}$$

$$G = 6.67430 \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \text{ -gravitatsiooni konstant,}$$

$$M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg - Maa mass,}$$

$R_M = 6371 \text{ km}$ - Maa raadius (keskmine väärtus). Kui **h** on trajektoori kõrgus, siis $\vec{r} = \vec{R}_M + \vec{h} = R_M + h$ (joonis 1):

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) = -m \cdot \left(G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) \right) = m \cdot \vec{g} \quad ,$$

siin **g** -raskuskiirendus, mille väärtus sõltub kõrgusest järgmiselt:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (R_M + h) \quad ,$$

või raskuskiirenduse absoluutse väärtuse jaoks:

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^2} \quad .$$

Kui $h \ll R_M$ (Keha asub peaaegu Maa pinnal) siis: $g(h=0) = \frac{G \cdot M}{R_M^2} = 9.814 \text{ m/s}^2$ -gravitatsioonikiirendus Tallinna

laidkraadil. Gravitatsioonilise vastastikmõju levimiskiiruse kohta on hetkel raske midagi öelda, seega seda efekti ignoreerime.

b) Takistusjõud.

Kasutame takistusjõu kirjeldamiseks tuntud valemit:

$$\vec{F}_{tak} = -0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v} \quad \text{antud valemis:}$$

C – aerodünaamiline tegur (vt. tabelit),

ρ_{atm} – atmosfääri tihedus (üldiselt sõltub kõrgust **h**)

$\vec{v}$ – keha kiirus **õhu suhtes**,

S – keha ristlõike pindala

Shape	Drag Coefficient
Sphere	0.47
Halfsphere	0.42
Cone	0.50
Cube	1.05
Angled Cube	0.80
Long Cylinder	0.82
Short Cylinder	1.15
Streamlined Body	0.04
Streamlined Halfbody	0.09

Measured Drag Coefficients

Atmosfääri tihedust saab arvutada kolmel viisil:

1. Baromeetiline valemiga:

$$\rho_{atm}(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g(h)}{R \cdot T} \cdot h} \quad \text{siin}$$

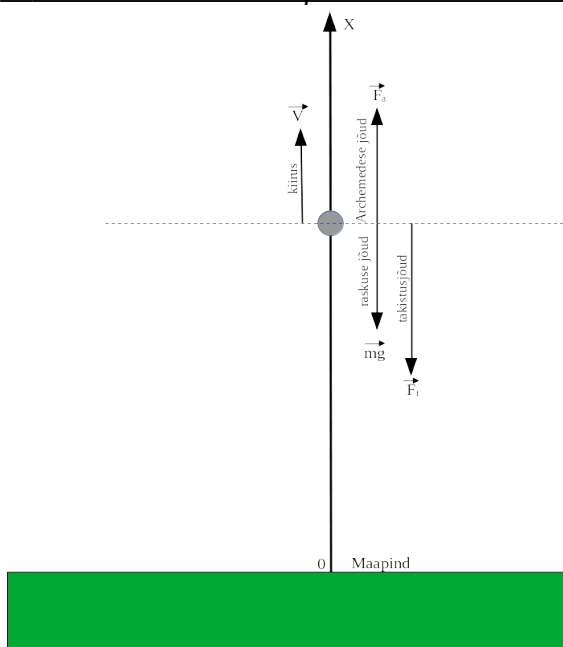
μ – gaasi ühe kilomooli mass,
 ρ_0 – atmosfääri tihedus Maa pinnal
 R – universaalne gaasi konstant $8314 \frac{J}{K \cdot kmool}$
 T – atmosfääri temperatuur kelvinides
 $g(h)$ – raskuse kiirendus kõrgusel h
 h – kõrgus

Tekib küsimus, kuidas arvutada atmosfääri tihedust Maa pinnal $\rho_{atm}(h=0) = \rho_0$. Selle jaoks saab kasutada ideaalse gaasi olekuvõrrandi (Mendeleejevi-Klaiperoni seadust):

$$PV_{gaas} = \frac{m_{gaas}}{\mu_{gaas}} R T \quad \text{avaldaime tihedust, siis} \quad \rho_0 = \frac{m_{gaas}}{V_{gaas}} = \frac{P \cdot \mu_{gaas}}{R \cdot T}, \quad \text{siin } P - \text{gaasirõhk Maa pinnal.}$$

2. Kasutame standardse atmosfääri omaduste kirjeldavaid programme (Kirjutatud C-keeles, Fortranis, Pythonis või Matlabis).

3. Saab kasutada atmosfääri tiheduse mõõtmise tulemusi (näiteks meteosondiga).



Oma programmides me kasutame tavaliselt esimest meetodit (Baromeetiline valem). Baromeetrilises valemis kasutame reaalseid atmosfääri parameetreid, meie puhul see on atmosfäärirõhk, temperatuur ja ühe kilomooli mass (mis peegeldab atmosfääri keemilist koostist). Järgnevalt kasutame eeldust, et atmosfäär on isothermiline (atmosfääri temperatuur ei sõltu kõrgusest, kuigi see pole nii:

https://en.wikipedia.org/wiki/U.S._Standard_Atmosphere).

Arvatakse, et Maa atmosfääri piir asub kõrgusel 100 km (nn **Kármáni joon**). See tähendab, et meie mudelis võime eeldada, et gravitatsiooni kiirendus peaaegu ei sõltu kõrgusest sellepärast et Maa pinnal ja Karmani tasemel raskuse kiirendus on peaaegu sama. Tõestame seda, arvutame selle jaoks järgmist seost:

$$\frac{g(h)}{g(h=0)} = \left(1 + \frac{h}{R_{Maa}}\right)^2 \quad \text{Kõrgusel } h=100 \text{ km seda suhe võrdub } 1.02 \text{ (vahe on vaid 2\%).}$$

c) Archimedese jõud (Üleslükkejõud).

Archimedese jõud alati suunatud raskuskiirenduse vastu ja arvutatakse järgmise valemiga

$$|\vec{F}_{arch}| = \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha} \quad \text{siin:}$$

V_{keha} – keha rumala, $g(h)$ – raskuse kiirendus, $\rho_{atm}(h)$ – atmosfääri tihedus kõrgusel h .

Joonis 2

Nüüd proovime lahendada meie põhiülesannet, arvutame keha koordinaati ja kiiruse sõltuvuste ajast. Selle jaoks on vaja integreerida järgmist diferentsiaal võrrandi (või diferentsiaal võrrandite süsteemi) (joonis 2).

$$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{tak} + \vec{F}_{arch}$$

Projitseerime kõik vektorid x-teljele. Kui koordinaadi telg **X** ja nulli punkt on valitud nagu joonisel 2 siis :

$$m \ddot{x} = -m \cdot g - 0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v + \rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}$$

see on tavaline Newtoni seadus, ainult veidi teistsugusel kujul kirjutatud.

Jagame seda võrrandi keha massiga siis saame:

$$\ddot{x} = -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm} \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g(h) \cdot V_{keha}}{m}$$

Nüüd määrame mõned vajalikud mudeli parameetrid (eeldame et keha liigub Maa pinna lähedal $h \ll R_{Maa}$):

$r_{keha}=1.8$ m keha on pall raadiusega 180 cm (näiteks see on meteoroloogiline sond),

$C=0.47$ palli jaoks 0.47 (https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient),

$m=5$ kg palli mass on 5kg

$g=9,814$ m/s² raskuse kiirendus. Kui keha trajektoori kõrgus $\gg$ kui Maa radius siis **g** ei sõltu kõrgust.

4.2 Kood

Nüüd me peame integreerima järgmist diferentsiaal võrrandi (keha koordinaatide ja kiiruste arvutamiseks erinevatel ajahetkedel.):

$$\ddot{x} = -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g \cdot V_{keha}}{m}$$

Klassikalises mehaanikas on teada et keha koordinaat **x**, kiirus **v** ja kiirendus **a** on seotud järgmist:

$$v = \dot{x}, a = \dot{v} = \ddot{x} \quad .$$

Antud võrrandi lahendamiseks saab kasutada modifitseeritud **Euleri** algoritmi (kiire, lihtne aga ei ole eriti täpne meetod) või Runge-Kutta-Fehlbergi meetodit järkuga 4-5 (**RKF45**) (koordinaatide ja kiiruste arvutamiseks kasutatakse Runge-Kutta meetod järkuga 4 ning sama meetod aga järkuga 5 kasutatakse ajasammu väärtuse reguleerimiseks) . Viimane meetod rakendati standard programmides **rkf45**, **ode45** mille saab leida saidil netlib.org.

I. **Euleri** meetod välja näeb järgmiselt:

Keha koordinaadi väärtus järgmisel aja hetkel $x(t+\Delta t)$ arvutatakse siis nii $x(t+\Delta t)=x(t)+v(t)\Delta t+a(t)\Delta t^2/2$. Siin $x(t), v(t)$ ja $a(t)$ on keha koordinaat, kiirus ja kiirendus eelmisel ajahetkel t :

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t + \frac{a(t) \cdot \Delta t^2}{2}$$

ja kiiruse

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t$$

siin Δt on integreerimise ajasamm (millise ajasammuga arvutatakse koordinaat ja kiirus.).

Selge et antud algorimi kasutamiseks me peame teada koordinaadi ja kiiruste väärtuste alg ajahetkel ($x(0)$ ja $v(0)$). Kiirendus arvutatakse üleval valemiga.

II. RKF45 meetod.

Alguses on väike seletus. Diferentsiaalvõrrand mida peame integreerida välja näeb järmist:

$$\ddot{x} = -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g \cdot V_{keha}}{m}, \text{ see on teist järku diferentsiaalvõrrand, kuid alamprogrammiga}$$

rkf45 saab integreerida ainult esimest järku diferentsiaalvõrrandi süsteemi. Selleks kirjutame ühe teist järku diferentsiaalvõrrandi asemel kaks esimest järku diferentsiaalvõrrandid. Esimest võrrandit kasutame keha koordinaadi arvutamiseks ja teist kiiruse arvutamiseks:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= -g - \frac{0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_{atm}(h) \cdot |\vec{v}| \cdot v}{m} + \frac{\rho_{atm}(h) \cdot g \cdot V_{keha}}{m} \end{aligned}$$

Alustame RKF45 fortrani programmi sisend ja väljund parameetrite kirjeldamist (vt. faili *srkf45.for*).

rkf45(func,neqn,y,t,tout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)

func – Alamprogrammi nime tuletiste arvutamiseks, meie puhul $\dot{x}$ ja $\dot{v}_x$. Teiste sõnadega siin me peame realiseerida üleval kirjutatud diferentsiaalvõrrandid

neqn – Võrrandite arv, meie juhul see on 2.

y – Ühemõõtmeline massiiv pikkusega “neqn”, meie juhul see on 2.

Fortrani koodis see masiiv kirejeldatakse nii: **real y(2).**

Samal ajal massiiv y(2) kasutatakse arvutatud parameetrite väärtuste salvestamiseks, meie juhul arvutatud koordinaadi ja kiiruse väärtused. Lepime kokku et hoiame koordinaadi väärtuse massiivis esimesel kohal ja kiirust teisel kohal. Test sõnaga y(1)=x ja y(2)=V_x.

t- ajaväärtus antud ajahetkel

tout- ajaväärtus järgmisel ajahetkel **tout=t+dt**, siin **dt** - ajasamm

relerr - suhtlline viga

abserr - absoluutne viga

iflag - kasutatakse arvutamise protsessi juhtimiseks (algne väärtus on 1)

work - reaalarvuline töömassiiv pikkusega 6·neqn+3, meie juhul see on 15.

iwork - täisarvuline töömassiiv fikseeritud pikusega 5.

Fortrani ja Matlabi programmid leiate siit:

http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPM/Loengud/nadal_4/:

Fortrani kood, Euleri algoritmi alusel.....	Fortran/dim1_euler.f90
Fortrani kood, rkf45 alamprogrammi alusel.....	Fortran/dim1_rkf45_v1.f90
	Fortran/dim1_rkf45_v2.f90
	Fortran/dim1_rkf45_v3.f90
Fail algandmedega dim1_rkf45_v3.f90 jaoks.....	Fortran/dim1_rkf45_v3.in
Lihtne kood tulemuste visualiseerimiseks.....	Fortran/visual.m
Lihtne Matlabi kood andmete visualiseerimiseks.....	Fortran/plot.m
Matlabi kood, Euleri algoritmi alusel.....	Matlab/dim1_euler.m
Matlabi kood, ode45 alamprogrammi alusel.....	Matlab/dim1_45_ro.m
Matlabi kood, kasutatud sündmuse funktsioon mycheck..	Matlab/dim1_45_ro_check.m
sündmuse funktsioon mycheck.....	Matlab/mycheck.m
Matlabi kood raskuse kiirenduse arvutamine.....	Matlab/r_raskuse.m

4.3 Ülesanded:

1. Alghetkel pall asub maapinnal (Algkiirus on 0).

- Mis kõrguseni ta tõuseb?
- Mis kõrguseni ta tõuseb Marsil, Veenusel ja miks ?
- Millise kiirendusega pall liigub kõrgeimas punktis ?

NB! Palli mass on 1 kg ja raadius 1,8 m.

2. Alguses pall asub liikumatult kõrgusel 10 km.

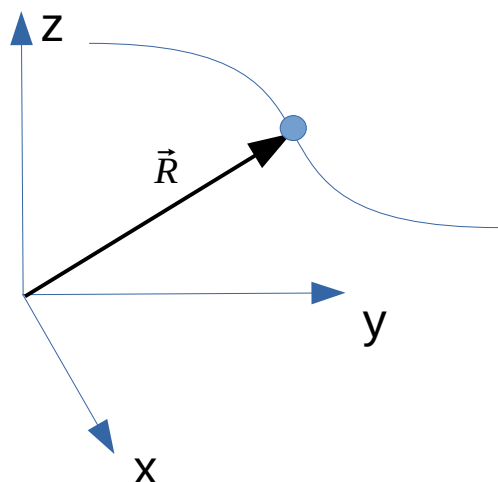
- Mis kiirusega ja kiirendusega ta kukub Maapinnale (Palli lõppkiirus ja lõppkiirendus)?
- Kui suur hõõrdejõud mõjub pallile kõrgusel 5 km ja mis kiirendusega ta liigub?
- Mis toimub sama palliga Marsil?

NB! Palli mass on 10 kg ja raadius 10 cm.

3. Pall viisatud ülesse algkiirusega 10 m/s. Mis kõrguseni ta tõuseb Veenusel ja Marsil?

NB! Palli mass on 10 kg ja raadius 10 cm.

Lisa 1. Mõned mehaanika mõisted



Liikuv keha kirjeldab kõverat, mida nimetatakse keha trajektoorigi. Klassikalises mehaanikas määrab keha positsiooni asukohavektor või raadiusevektor $\vec{R}(t)$.

Vektoreid kolmemõõtmelises ruumis saab esitada järgmiselt, sõltumata sellest kas see on raadius-vektor:

$$\vec{R} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

keha kiiruse vektor:

$$\vec{v} = v_x(t) \cdot \vec{i} + v_y(t) \cdot \vec{j} + v_z(t) \cdot \vec{k}$$

või kiirenduse vektor:

$$\vec{a} = a_x(t) \cdot \vec{i} + a_y(t) \cdot \vec{j} + a_z(t) \cdot \vec{k}$$

Klassikalise mehaanika põhiülesanne on keha koordinaatide arvutamine erinevatel ajamomentidel et oleks võimalik keha liikumise kirjeldada. Aga mis parameetrid kirjeldavad keha liikumist?

- 1.) Keha koordinnadid $x(t)$, $y(t)$, ja $z(t)$,
- 2.) keha kiirus ja
- 3.) kiirendus.

Siis tekib küsimus aga kuidas saab arvutada keha kiirust ja kiirendust? Vastus on lihtne. Kiirus - keha liikumise kiirus nätab seda kui kiiresti muutuvad keha koordinaadid. See on koordinaatide muutumise kiirus. Aga **matemaatika vaatenurgast** mingi funktsiooni muutumise kiirus see on antud funktsiooni tuletis aja järgi. See tähendab et raadius-vektor ja kiiruse vektor on seotud järgmiselt:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}}$$

ja kiirenduse jaoks:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{R}} .$$

Kiirendust saab arvutada ka teisiti, Newtoni seaduse abil.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Sageli on mõistlik kasutada arvutustes vektorite asemel vektorite koordinaate. Raadius-vektori , kiiruse vektori ja kiirenduse vektori koordinaadid on seotud järgmiselt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x & \dot{y} &= v_y & \dot{z} &= v_z \\ \ddot{x} &= \dot{v}_x = a_x = \frac{F_x}{m} & \ddot{y} &= \dot{v}_y = a_y = \frac{F_y}{m} & \ddot{z} &= \dot{v}_z = a_z = \frac{F_z}{m} \end{aligned}$$

Kuidas saab neid võrrandeid kasutada keha liikumise kirjeldamiseks? **Mehaanikas tehakse vastupidi**, kui kehale mõjuvad jõud on teada, siis antud diferentsiaalvõrrandite abil arvutatakse keha kiirus ja koordinaadid.

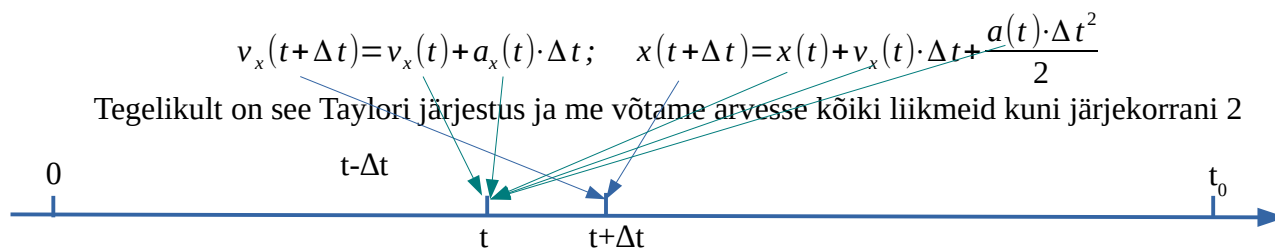
Vaatleme liht ülesanne. Eeldame, et keha liigub pideva kiirendusega ja liikumine on ühemõõtmeline. See tähendab, et keha liigub näiteks mööda x-telge. Keha liikumist kirjeldame matemaatiliselt. Me peame arvutada keha koordinaati sõltuvust ajast. See alusel saab otse arvutada kiirust ja kui on vaja, keha kiirendust (praeguses ülesandes eeldame, et kiirendus on antud parameeter).

Kuidas seda saab teha? Standardne koordinaati ja kiiruse seos annab teist järku differentiaalvõrrandi mille vaja integreerida kaks korda koordinnati saamiseks.

$$v_x(t) = \pm v_{0x} \pm a_x \cdot t; \quad x(t) = x_0 \pm v_{0x} \cdot t \pm \frac{a \cdot t^2}{2}$$

See on üleva differentiaalvõrrandi täpne lahendus, kuid seda pole alati võimalik analüütiliselt lahendada. Kui ei saa analüütiliselt siis saab arvutiga numbriliselt .

Mis siis, kui kehale mõjuv jõud ehl keha kiirendus sõltub ajast? Siis saab diferentsiaalvõrrandi arvuliselt lahendada järgmiselt. Kui tahame arvutada keha koordinaadid ja kiiruse ajavahemikus 0 kuni t_0 ajasammuga Δt siis saab kasutada eelmised valemid aga enne seda me peame neid natuke parandada.



Võtame need parameetrid eelmise ajasammui lõpp-punktist. Kiirendust arvutame Newtoni seadusega. Teisisõnu eeldame, et ajasamm on piisavalt väike, et arvestada kiirendust konstandseks. Seda meetodi absoluutne viga on arvutatakse valemiga:

$$\frac{\dot{F}(t) \Delta t^3}{6m}$$

Selge et selle meetodi täpsu suurem kui väiksem on ajasamm. Meetod töötab **paremini**, kui väiksem on ajasamm.