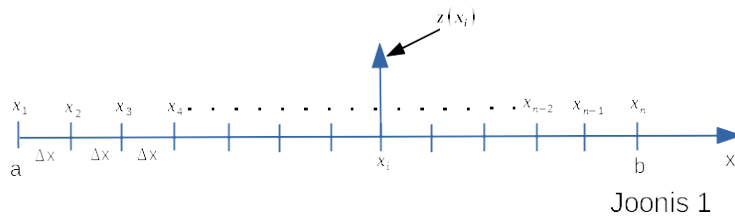


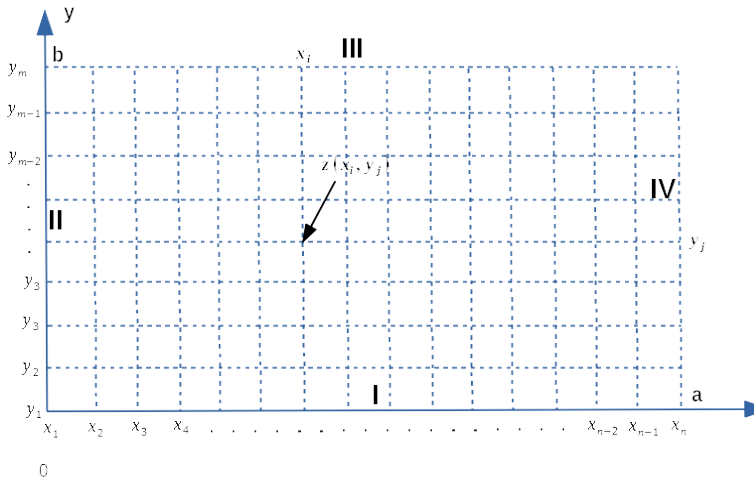
Lained.

1). 1d ülesanne. Nööri võnkumised.



Modelleerida ühenõõtmelise nööri võnkumine (vaata joonist 1). Selle jaoks on vaja arvutada nööri nihke tasakaaluasendist, erinevates punktides ja erinevatel ajamomentidel $z(x, t)$. $z(x, t)$ sõltub kahest parameetrist, koordinaadist ja ajast. Antud funktsiooni arvutamiseks on vaja integreerida järgmist diferentsiaalvõrrandi (laine võrrandi):

$$\frac{dz(x, t)}{dt} = v^2 \cdot \frac{d^2 z(x, t)}{dx^2}, \quad v\text{-laine kiirus.}$$



Teeme seda numbriliselt. On selge, et sel juhul on vaja funktsiooni $z(x, t)$ arvutada diskreetselt, mingi koordinaatsammuga Δx ja aja sammuga Δt . Teisisõnu, kui funktsiooni väärtus kõigis punktides ajahetkel t on teada, siis diferentsiaalvõrrandiga saab funktsiooni arvutada järgmisel ajahetkel $t + \Delta t$ samades punktides. Alustame sellest et proovime diskretiseerida diferentsiaalvõrrandi (vaata joonist

1). Kasutame tuletise definitsiooni, siis:

$$\frac{d^2 z(x, t)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dz(x, t)}{dx} \quad \text{edasi asendame } \frac{dz}{dx} = z' \quad \text{siis}$$

$$\frac{dz'(x, t)}{dx} \approx \frac{\Delta z'}{\Delta x} = \frac{z'(x + \Delta x, t) - z'(x, t)}{\Delta x} = \frac{z'(x + \Delta x, t)}{\Delta x} - \frac{z'(x, t)}{\Delta x}$$

arvutame viimased avaldised eraldi:

$$\frac{z'(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{z(x + 2 \cdot \Delta x, t) - z(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad \text{ja} \quad \frac{z'(x, t)}{\Delta x} = \frac{z(x + \Delta x, t) - z(x, t)}{\Delta x^2}$$

pärast valemite kombineerimist saame:

$$\frac{d^2 z(x, t)}{dx^2} \approx \frac{z(x + 2 \cdot \Delta x, t) - 2 \cdot z(x + \Delta x, t) + z(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} = \frac{z(x + \Delta x, t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}.$$

Aja tuletise saab esitada samal viisil:

$$\frac{d^2 z(x, t)}{dt^2} \approx \frac{z(x + 2 \cdot \Delta t, t) - 2 \cdot z(x + \Delta t, t) + z(x, t)}{\Delta t^2} = \frac{z(x + \Delta t, t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x - \Delta t, t)}{\Delta t^2}$$

siis terve diferentsiaal võrrand :

$$\frac{z(x, t + \Delta t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} = v^2 \frac{z(x + \Delta x, t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad \text{pärast lihtsustamist saame:}$$

$$z(x, t + \Delta t) = 2 \cdot z(x, t) - z(x, t - \Delta t) + \left(\frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \cdot (z(x + \Delta x, t) - 2 \cdot z(x, t) + z(x - \Delta x, t))$$

See on diskreetne lainevõrrand mille saab realiseerida Fortrani või Matlabi koodis. Loodus antud võrrandi on selline et alguses me peame:

1.) määrata algnihkete igas punktis algusaja hetkel – **algtingimused**

$$z(\forall x, t=0)$$

2. nihked nööri otstes - **rajatingimused**

$z(x=a, t)$ ja $z(x=b, t)$ kui rea lõpu nihke on fikseeritud ja ei sõltu ajast, peame kirjeldama kahte parameetrit $z(x=a)$ ja $z(x=b)$.

Kirjutame Fortrani programmi nööri võnkumise modelleerimiseks.

Eeldame et esimene ots asub nullis $a=0$ ja varda pikkus on 1m see tähendab et $b=1$.

Variant I.

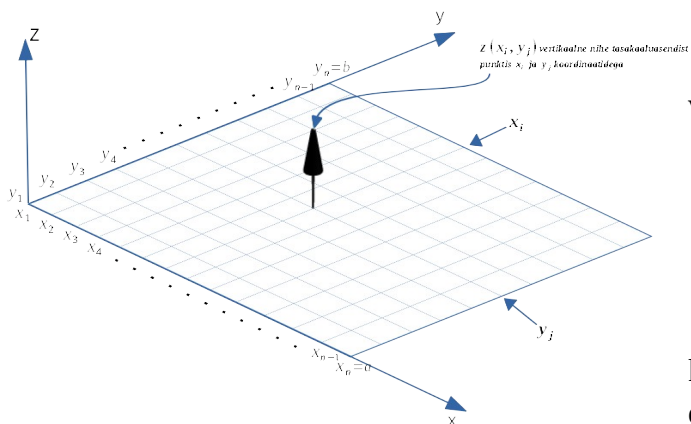
a) Algtingimused - $z(x, t=0) = \begin{cases} 0.1m, & \text{kui } x=0 \\ 0, & \text{kui } x>0 \end{cases}$

b) Rajatingimused - varra otstes $z(x=0)=0.1m, z(x=b)=0K$.

Variant II.

Fortraani kood.

2). Nelinurkse membraani võnkumine (joonis 2,3).



Kahemõõtmelise probleemi korral näeb diferentsiaalvõrrand välja järgmine:

$$\frac{d^2 z(x, y, t)}{dt^2} = v^2 \cdot \left(\frac{d^2 z(x, y, t)}{dx^2} + \frac{d^2 z(x, y, t)}{dy^2} \right)$$

On selge, et seljuhul funktsioon $T(x, y, t)$ sõltub kahest kordinaatidest ja ajast. Analoogiliselt seda võrrandi saab diskretiseerida, siis me saame:

Joonis 3

$$z(x, y, t + \Delta t) = 2 \cdot z(x, y, t) - z(x, y, t - \Delta t) + \left(\frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \cdot (z(x + \Delta x, y, t) + z(x, y + \Delta y, t) - 4 \cdot z(x, y, t) + z(x - \Delta x, y, t) + z(x, y - \Delta y, t))$$

Algtingimused:

$z(x,y,t=0)=f(x,y)$ – membraani nihkete jaotus alg ajahetkel.

Rajatingimused:

$z(\{x_0\},\{y_0\},t)$ – membraani nihkete väärtused punktides fikseeritud koordinaatidega $\{x_0\},\{y_0\}$.

Nüüd arvutame ruudukujulise plaadi võnkumised. Plaadil külje pikkus on 1m (joonis 3).

Algtingimused:

$z(x,y,t=0)=\begin{cases} 0.1\text{ m}, & \text{kui } x=0, 0<y<1 \\ 0, & \text{teistes punktides} \end{cases}$ see tähendab et alg ajahetkel ($t=0$), II-l küljel $T=100\text{K}$. Kõikides teistes punktides $T=0\text{K}$.

Rajatingimused:

Küljel II $z=0.1\text{ m}$, küljel I, III, IV $z=0\text{ m}$.