

Soojusjuhtivus.

1). 1d ülesanne.

Meile on vaja arvutada temperatuuri jaotuse varra sees. Selle jaoks on vaja arvutada temperatuuri väärtuste varras erinevates punktides ja erinevates ajamomentides $T(x,t)$. $T(x,t)$ sõltub kahest parameetrist, koordinaadist ja ajast. Antud funktsioon arvutamiseks on vaja integreerida järgmist diferentsiaalvõrrandi (soojujuhtivuse võrrand):

$$\frac{dT(x,t)}{dt} = \alpha \cdot \frac{d^2 T(x,t)}{dx^2}, \quad \alpha\text{-soojujuhtivuse tegur.}$$

Teeme seda numbriliselt. On selge, et sel juhul saab funktsiooni $T(x, t)$ arvutada ainult diskreetselt mõne koordinaatsammu Δx ja aja astme Δt abil. Teisisõnu, kui funktsiooni väärtus kõigis punktides ajahetkel t on teada, siis diferentsiaalvõrrandi saab funktsiooni arvutada järgmisel ajahetkel samades punktides. Alustame sellest et proovime diskretiseerida diferentsiaalvõrrandi (vaata joonist 1). Kasutame tuletise definitsiooni siis:

$$\frac{dT(x,t)}{dt} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T(x,t)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dT(x,t)}{dx} \quad \text{edasi asendame } \frac{dT}{dx} = T' \quad \text{siis} \\ \frac{dT'(x,t)}{dx} &\approx \frac{\Delta T'}{\Delta x} = \frac{T'(x+\Delta x,t) - T'(x,t)}{\Delta x} = \frac{T'(x+\Delta x,t)}{\Delta x} - \frac{T'(x,t)}{\Delta x} \end{aligned}$$

arvutame viimased avaldised eraldi

$$\frac{T'(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = \frac{T(x+2\cdot\Delta x,t) - T(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2} \quad \text{ja} \quad \frac{T'(x,t)}{\Delta x} = \frac{T(x+\Delta x,t) - T(x,t)}{\Delta x^2}$$

kui kombineerime kõik valemid siis:

$$\frac{d^2 T(x,t)}{dx^2} \approx \frac{T(x+2\cdot\Delta x,t) - 2\cdot T(x+\Delta x,t) + T(x,t)}{\Delta x^2} = \frac{T(x+\Delta x,t) - 2\cdot T(x,t) + T(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} \quad \text{ja}$$

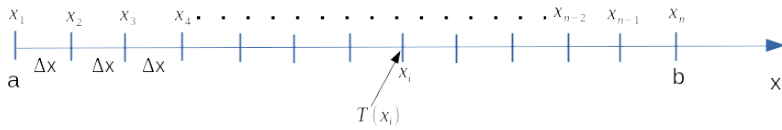
diferentsiaal võrrand:

$$\frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} = \alpha \cdot \frac{T(x+\Delta x,t) - 2\cdot T(x,t) + T(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} \quad \text{lihtsustamise pärast me saame:}$$

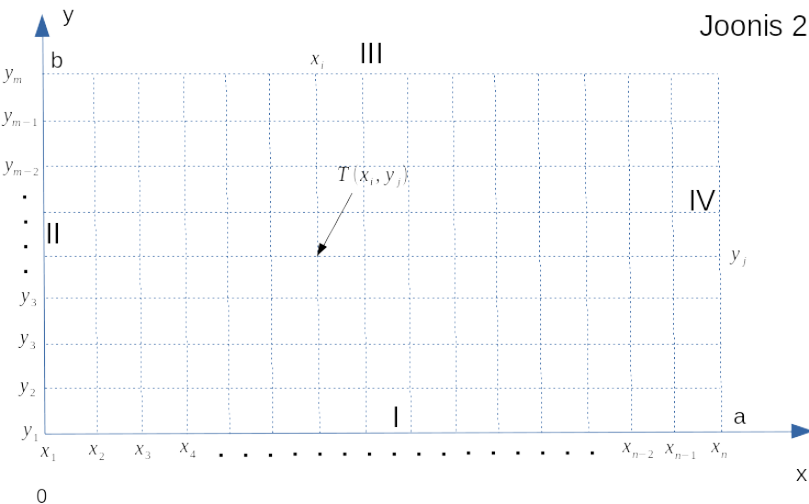
$$T(x,t+\Delta t) = T(x,t) + \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) \cdot (T(x+\Delta x,t) - 2\cdot T(x,t) + T(x-\Delta x,t))$$

Koordinaatide asemel saab kasutada sõlmede numbreid ($x \rightarrow i$):

Joonis 1



Joonis 2



$$T_i(t+\Delta t) = T_i(t) + \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) \cdot (T_{i+1}(t) - 2 \cdot T_i(t) + T_{i-1}(t))$$

See on diskreetne soojusliikumise võrrand mille saab realiseerida Fortrani või Pythoni koodis.

Loodus antud võrrandi on selline et alguses me peame:

1.) määrata temperatuuri väärtused igas punktis alguses ($t=0$) – see on nn **algtingimus** $T(\forall x, t=0)$

2. Temperatuuri väärtused varra otstes - **rajatingimused**

Me peame määrata $T(x=a, t)$ ja $T(x=b, t)$. Kui varra otstes temperatuurid fikseeritud ja ei sõltu ajast siis on vaja määrata ainult kaks parameetrid $T(x=a)$ ja $T(x=b)$.

Ülesannet:

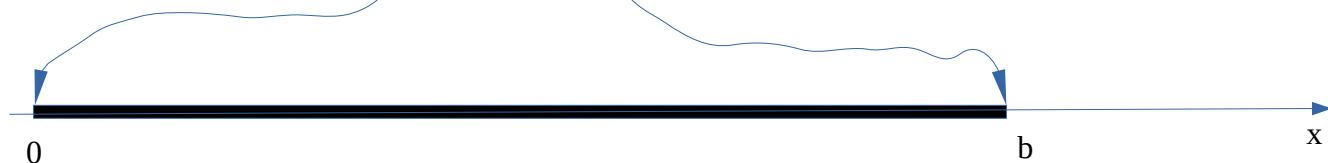
Ülesanne 1.

Kirjutame Fortrani programmi soojusliikumise modelleermiseks varra sees.

Eeldame et esimene ots asub nullis $a=0$ ja varra pikkus on 1m see tähendab et $b=1$.

a) **Algtingimused** - $T(x, t=0) = \begin{cases} 100, & \text{kui } x=0 \\ 0, & \text{kui } x>0 \end{cases}$

b) **Rajatingimused** - varra otstes $T(x=0) = 100 \text{ K}$, $T(x=b) = 0 \text{ K}$. Nendes punktides on temperatuur fikseeritud. Me ei pea neid muuta.



Kood on realiseeritud programmis **fortran/soojus1d.f90**

Ülesanne 2.

2d ülesanne (joonis 2).

Teoreetilised alused.

Kahemõõtmelise probleemi korral näeb diferentsiaalvõrrand välja järgmine:

$$\frac{dT(x, y, t)}{dt} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2 T(x, y, t)}{dx^2} + \frac{d^2 T(x, y, t)}{dy^2} \right)$$

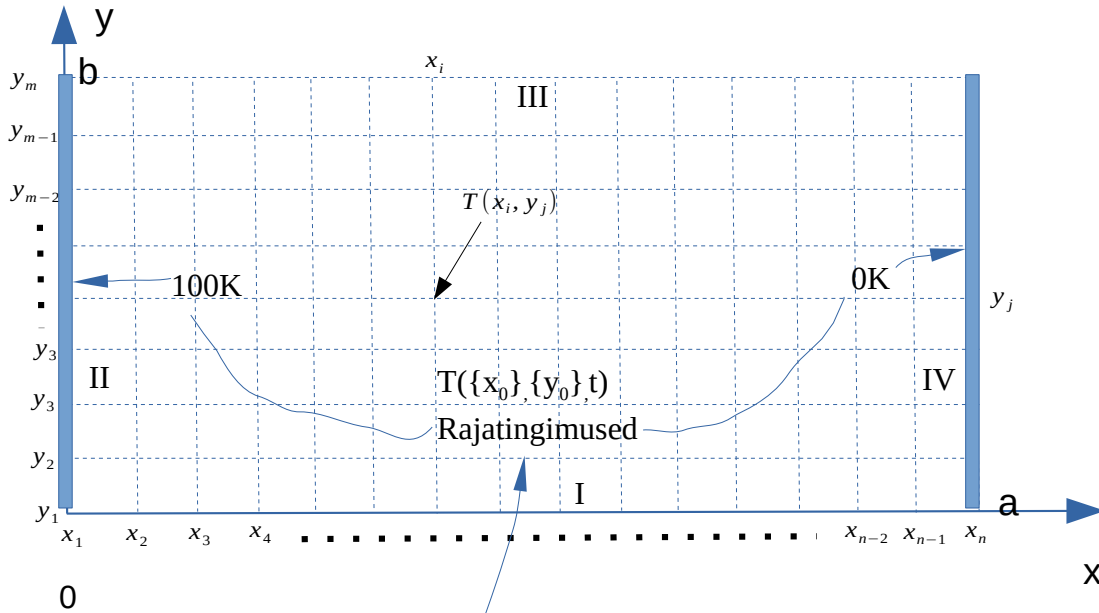
On selge, et seljuhul funktsioon $T(x, y, t)$ sõltub kahest kordinaatidest ja ajast. Analoogiliselt seda võrrandi saab diskretiseerida, siis me saame:

$$T(x, y, t+\Delta t) = T(x, y, t) + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \right) \cdot (T(x+\Delta x, y, t) + T(x, y+\Delta y, t) - 4 \cdot T(x, y, t) + T(x-\Delta x, y, t) + T(x, y-\Delta y, t))$$

Asendame sõlmede koordinaadid sõlmede numbritega:

$$T_{i,j}(t+\Delta t) = T_{i,j}(t) + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \right) \cdot (T_{i,j}(t) + T_{i,j+1}(t) - 4 \cdot T_{i,j}(t) + T_{i-1,j}(t) + T_{i,j-1}(t))$$

Ülesanne 2.1



Algtingimused:

$T(x,y,t=0)=f(x,y)$ – temperatuuri jaotus alg ajahetkel. Eeldame et algus kõikides punktides temperatuur 0K.

$T(x,y,t=0) = \begin{cases} 100, & \text{kui } x=0, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{teistes punktides} \end{cases}$ see tähendab et alg ajahetkel ($t=0$), I-l küljel $T=100K$. Kõikides teistes punktides $T=0K$.

Rajatingimused:

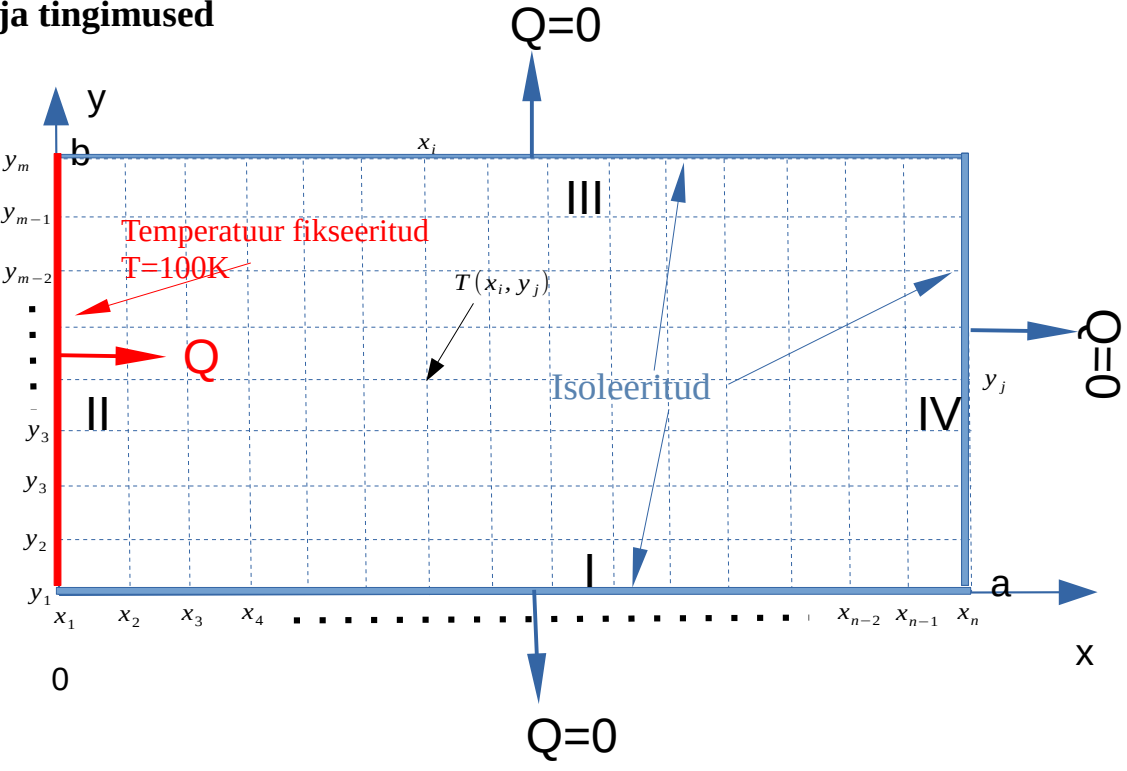
$T(\{x_0\}, \{y_0\}, t)$ – temperatuuri väärtused punktides fikseeritud koordinaatidega $\{x_0\}, \{y_0\}$.

Küljel II $T=100K$, küljel I, III, IV $T=0K$.

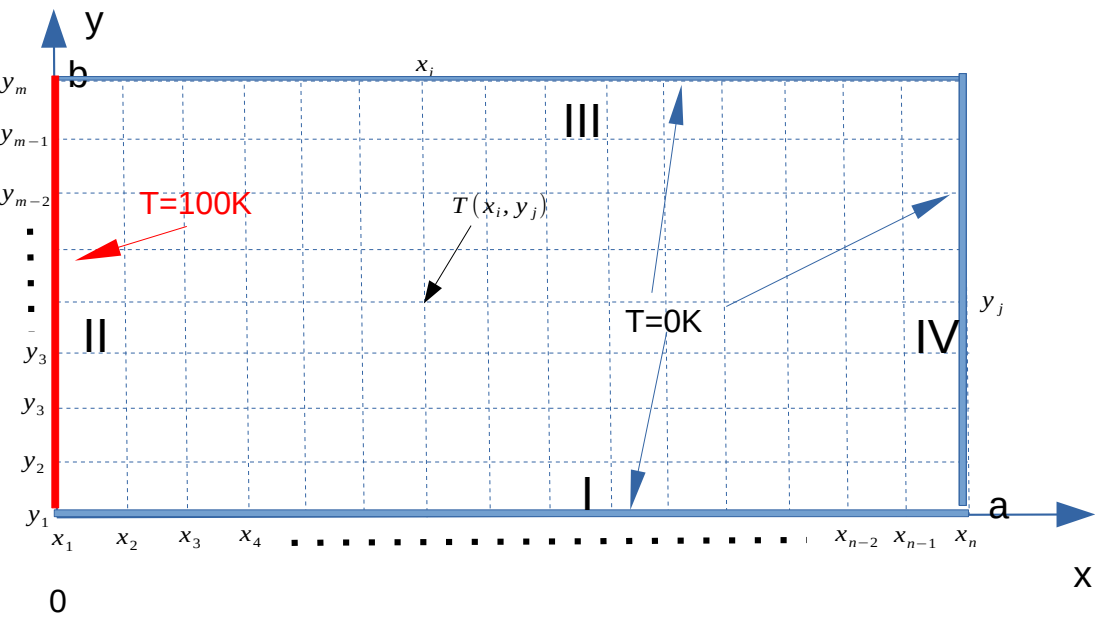
Seda variant on realiseeritud programmis **fortran/soojus2d_1.f90**

Ülesanne 2.2

Raja tingimused



Algtingimused



Ülesanne 3.1

Kirjutage Matlabi programm, mis analoogiline programmiga **Fortran/soojus2d_1.f90**

Ülesanne 3.2

Kirjutage Matlabi programm, mis analoogiline programmiga **Fortran/soojus2d_2.f90**

Ülesanne 3.3

Kirjutage Matlabi programm, mis analoogiline programmiga **Fortran/soojus2d_3.f90**

2D ülesannete visualiseerimiseks kasutage Matlabi programmi : **soojus_visual.m**

Või pythoni kood:

soojus_visual_mayavi_anim.py - animatsiooni loomiseks

soojus_visual_mayavi.py

Kasutatakse Pythoni moodul Mayavi. Kuid see moodul tuleb installida, seda saab teha käsureale sisestades:

pip install PyQt5 mayavi

Või saab kasutada Matlab keskkonna - pdetools

<https://www.youtube.com/watch?v=gFnFEsqXOwo>

<https://www.youtube.com/watch?v=r62UoKePegs>