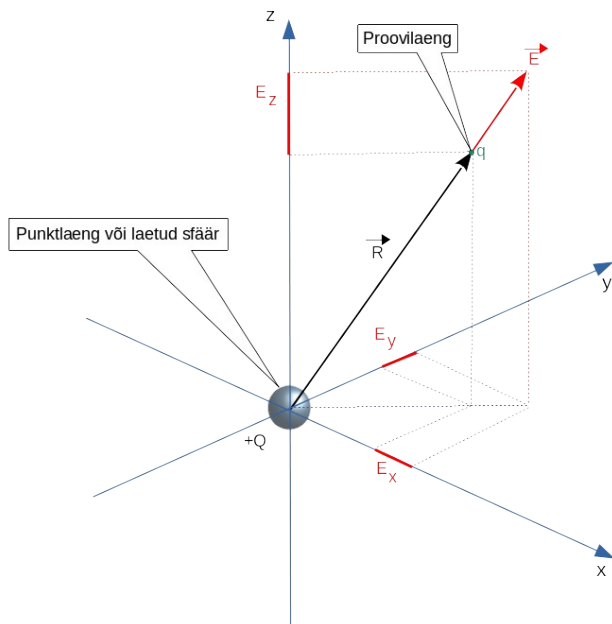


I.) Elektrostaatiline väli.



Joonis 1

Laetud keha (laeng $Q[C]$) loob enda ümber elektrivälja. Elektrivälja omadused iseloomustavad järgmised parameetrid: elektrivälja tugevuse vektor $\vec{E}$ [V/m] ja elektrivälja potentsiaal φ [V]. Proovilaengule q mõjuva elektrostaatilise jõusuurus arvutatakse valemiga

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad (1).$$

Proovilaengu potentsiaalne energia arvutatakse analoogiliselt $E_{pot} = q \cdot \varphi [J]$ (2).

Kahe punktläengu vahelise jõu väärtus arvutame Coulombi seaduse abil:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{R^3} \cdot \vec{R} = q \cdot \vec{E}$$

ja elektrostaatiline potentsiaalne energia

$$U_{pot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{R} = q \cdot \varphi \quad (3).$$

Siis $\mathbf{q}$ on punkt laengu elektrivälja tugevuse vektor

arvutatakse nii (vaata joonist 1):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \vec{R} \quad (4).$$

φ – elektrivälja potentsiaal. Põhilised parameetrid $\vec{E}$ ja φ seotud omavahel nii:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\hat{\nabla} \varphi \quad (5)$$

kus gradiendi operaator: $\text{grad} = \hat{\nabla} = \frac{d}{dx} \cdot \vec{i} + \frac{d}{dy} \cdot \vec{j} + \frac{d}{dz} \cdot \vec{k}$ ja meie juhul

$$\vec{E} = \text{grad } \varphi = \hat{\nabla} \varphi = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \vec{k} \quad (6).$$

Potentsiaali sõltuvuse saab arvutada võrrandist $\vec{E} = -\hat{\nabla} \varphi$ kui me eeldame et ülesanne omab sfäärilist sümmeetriat ja parameetrid $\vec{E}$ ja φ sõltuvad ainult asukohavektorist $\vec{R}$. Kui kasutame gradiendi operaatorit saitist [\[https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates\]](https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates) siis diferentsiaalvõrrandi punktläengu

potentsiaali arvutamiseks $\frac{d\varphi}{dR} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$ ja $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$ (7).

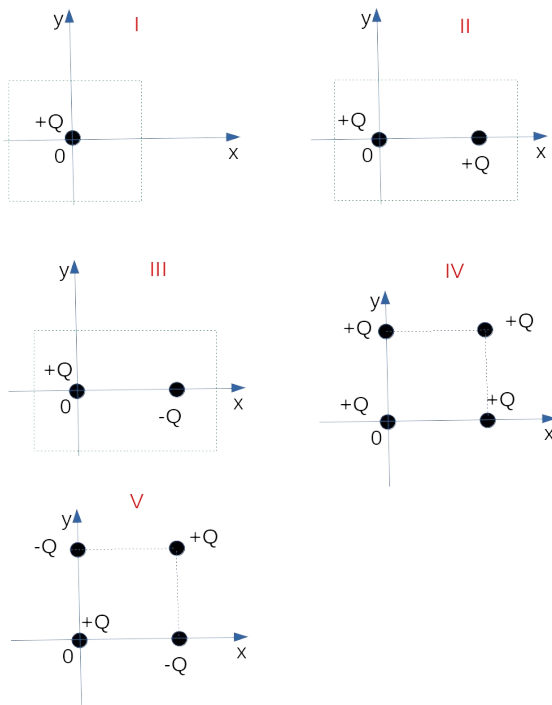
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \vec{R} \text{ -punktläengu elektriväljatugevuse vektor (8)}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} \quad \text{-punktlangu elektrivälja potentsiaal. (9)}$$

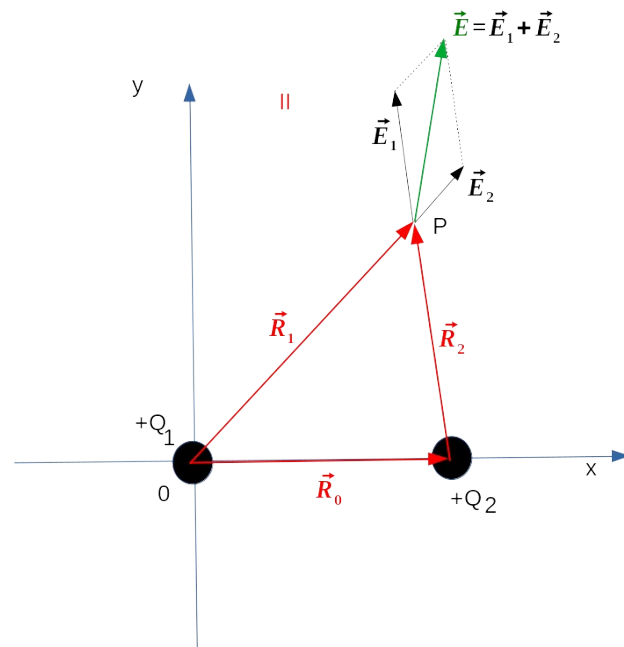
Tuletan meelde et antud valemid saab kasutada alles punktlangu elektrivälja kirjeldada!

Kui süsteem koosneb rohkem kui ühest laengust, saab elektrivälja tugevuse vektorid ja potentsiaalid kokku võtta (superpositsiooni omadus): $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$ (10).

Ülesanne:



Joonis 2



Joonis 3

Arvutame elektrivälja tugevuse vektori pikkuse jaotuse ja potentsiaali jaotuse valitud alades (vaata joonist 2).

Summarse elektrivälja vektori pikkus (vaata joonist 3) arvutatakse nii $|\vec{E}| = \sqrt{(E_{1x} + E_{2x})^2 + (E_{1y} + E_{2y})^2}$ (11), kus

$$E_{1x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R_1^3} \cdot x_1 \quad \text{ja} \quad E_{1y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R_1^3} \cdot y_1 \quad (12), \quad \text{siin} \quad R_1^3 = (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}. \quad \text{Summaarne potentsiaal arvutatakse}$$

$$\text{analoogiliselt} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{R_2} \quad (13).$$

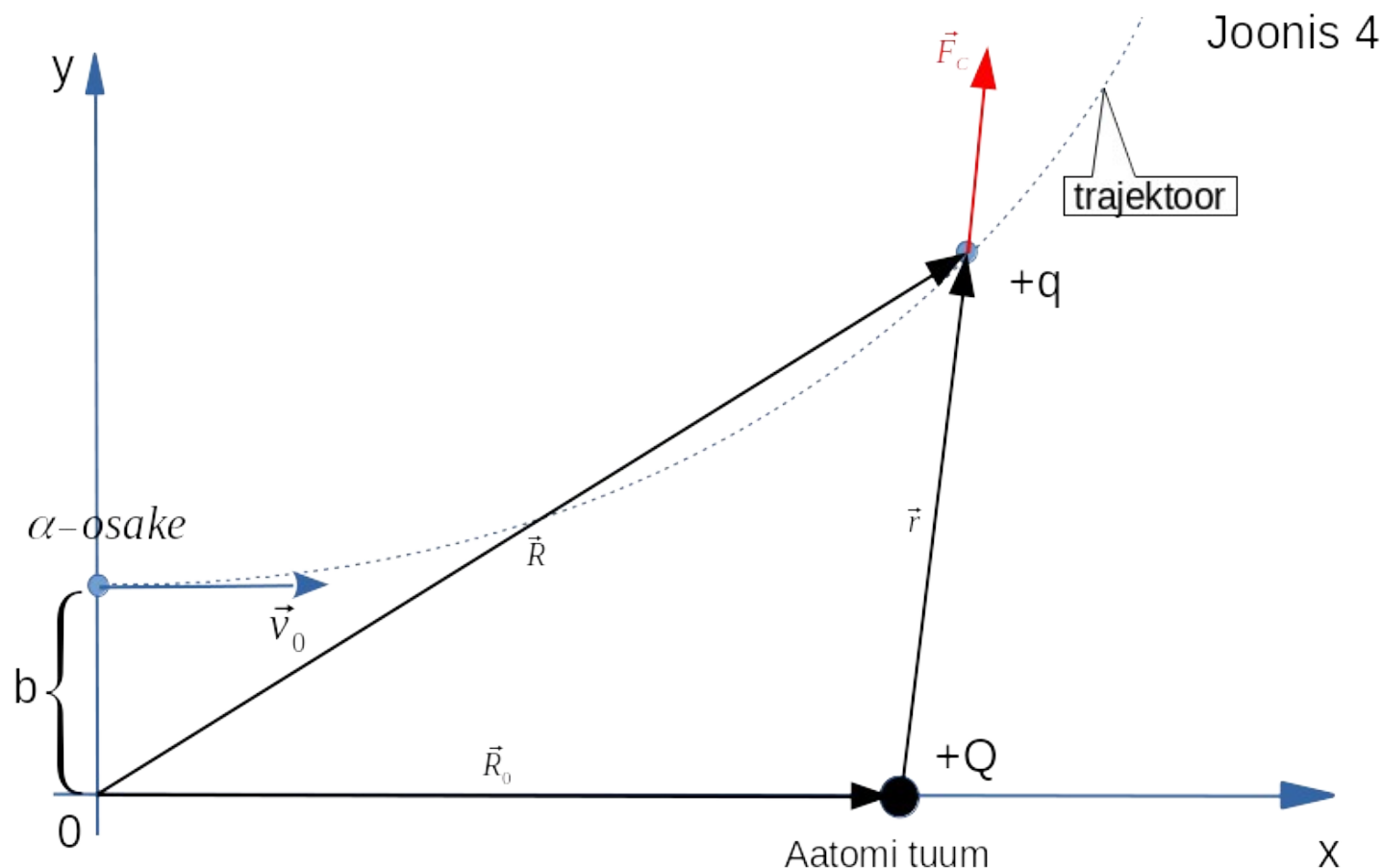
Variant III (dipool) on realiseeritud programmis **Fortran/dipool.f90** ja **dipool_visual.py**

Ülesanne 1. Kirjutage analoogilised Fortrani programmid variaandide I, III, IV ja V jaoks.

Ülesanne 2. Kirjutage analoogilised programmid Matlabi keeles.

II.) Rutherfordi katse.

Kirjeldame α – osakese liikumine tuuma elektrostaatilises väljas.



α -osake - heeliumi aatomi tuum, mille koosneb kahest prootonist ja kahest neutroonist. α -osake osakeste laeng on positiivne ja kaks korda suurem kui elementaarlaeng $q=+2e=3.204 \cdot 10^{-19}\text{C}$ ja mass on neljakordse prootoni mass $m=4 \cdot m_p=4 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}=6.68 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ (m_p – prootoni mass). α -osake liigub tuuma elektrostaatilises väljas algkiirusega V_0 (vaata joonist 4). Osake ja tuum tõukuvad ja tõukimise jõud arvutatakse Coulombi seaduse järgi:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (14) \text{ ja potentsiaalne energia}$$

$$U_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r} \quad (15).$$

Selge et $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_0$ siis

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{|\vec{R} - \vec{R}_0|^3} \cdot (\vec{R} - \vec{R}_0) \quad (16).$$

α -osake liikumise võrrad (Newtoni teine seadus) kirjutatakse otse:

$$\vec{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{q \cdot Q}{|\vec{R} - \vec{R}_0|^3} \cdot (\vec{R} - \vec{R}_0) \quad (17)$$

.Liikumine on kahemõõtmeline siis projekteerime kõik vektorid teljel x ja y :

$$\ddot{X} = \frac{q \cdot Q}{4 \pi \epsilon_0 m} \cdot \frac{(X - R_0)}{\left(\sqrt{(X - R_0)^2 + Y^2}\right)^3} \quad \ddot{Y} = \frac{q \cdot Q}{4 \pi \epsilon_0 m} \cdot \frac{Y}{\left(\sqrt{(X - R_0)^2 + Y^2}\right)^3} \quad (18).$$

Kui me kasutame rkf45 programmi diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendamiseks (Fortrani kood) siis on vaja võrandite järku vähendada:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= V_x & \dot{V}_x &= \frac{q \cdot Q}{4 \pi \epsilon_0 m} \cdot \frac{(X - R_0)}{\left(\sqrt{(X - R_0)^2 + Y^2}\right)^3} \\ \dot{Y} &= V_y & \dot{V}_y &= \frac{q \cdot Q}{4 \pi \epsilon_0 m} \cdot \frac{Y}{\left(\sqrt{(X - R_0)^2 + Y^2}\right)^3} \end{aligned} \quad (19).$$

Ülesanne 3:

Siis kokku on vaja arvutada järgmised parameetrid : X,Y – osakese koordinaadid, V_x,V_y – osakse kiiruse projektsioonid. Algtingimused saab kujutada nii (vaadake joonist 4):

X(0)=0

Y(0)=0.1

V_x(0)=10.

V_y(0)=0.

Nt=100

dt=0.0001 sek

b=0.01 m

R₀=1.0 m

q=3 nC

Q=0.1 nC

mass= 1 ng

Ülesanne 4. Kirjutage analoogilised programmid Matlabi keeles.

Ülesanne 5. Kuidas osakese kiirendus sõltub osakese ja tuuma vahelisest kaugusest? Joonistage graafik.

Võtame ülesande 3 andmed.

Ülesanne 6. Arvutage osakese mehaanilise koguenergia ($E_{kin} + E_{pot}$). Kasutage **Fortran/ruther.f90** + **ruther_visual.m** programmid. Võtame ülesande 3 andmed. Kuidas $E_{kogu} = E_{kin} + E_{pot}$ sõltub ajast?

Failide väike kirjeldus:

dipool.f90 - dipooli elektrivälja arvutamine

dipool_visual.m - dipooli elektrivälja visualiseerimiseks

ruther.f90 - rutherfordi katse simuleerimine

ruther_visual.m - rutherfordi katse visualiseerimiseks

dipool_visual_mayavi.py - dipooli elektrivälja visualiseerimiseks (kasutame moodulit Mayavi).

Kuid see moodul tuleb installida, seda saab teha käsureale sisestades:

pip install PyQt5 mayavi