

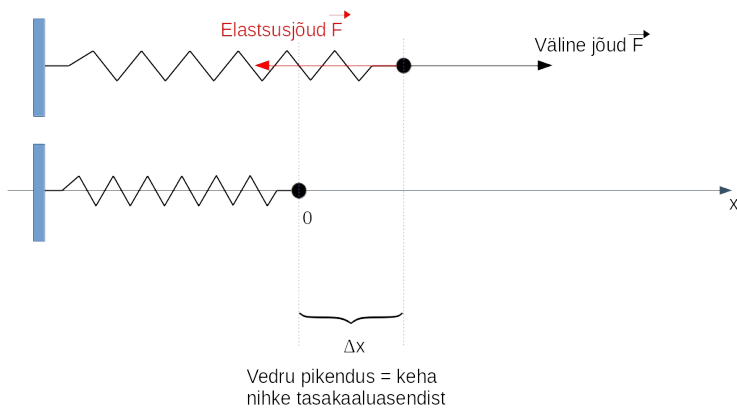
10. Ostsillaatorid (vedru pendel, sumbvõnkumised, sundvõnkumised, matemaatiline pendel, anharmoonilised võnkumised).

10.1 Teoreetilised alused

10.1.1. Vedrupendel.

10.1.1.1. Vabad võnkumised

Analüütiline lahend.



Vaatleme süsteem, mis koosneb vedruotsas asuvast kehasest massiga m (vaata joonis1). Kuuli hálve tasakaaluasendist viib vedru pikenemiseni Δx ja sellest tuleneva jõu ilmumiseni (Hooke'i jõud)

$F_{\text{hooke}} = -k \cdot \Delta x$ (k on elastsuskoefitsient). Läheme võrrandi juurde, siis saate otse kirjutada (liikumise võrrandi või Newtoni seaduse):

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot \Delta x$$

Kuna antud võrrandis keha nihke Δx ja koordinaat x on võrdsed siis liikumise võrrandi saab kirjutada järgmiselt:

Joonis 1.

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$$

Jagame võrrandi keha massiga m ja kasutame uut muutujat $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Siis liikumise võrrandi saab kirjutada:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Alustame sellest et provime saada analüütilise lahenduse. Otsime lahendust vormis $x(t) = e^{\lambda \cdot t}$. Paneme see valemit liikumise võrrandisse, siis saame ruutvõrrandi λ – väärtuste arvutamiseks:

$$\lambda^2 = -\omega_0^2, \text{ siis } \lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega_0$$

Kombineerime neid eksponendiga siis liikumise võrrandi lahend välja näeb nii:

$$x(t) = A \cdot e^{+i \omega_0 \cdot t} + B \cdot e^{-i \omega_0 \cdot t},$$

siin A ja B mingeid parameetrid mille väärtused saame algtingimustest. Tuletis aja järgi annab võrrandi kiiruse arvutamiseks.

$$v(t) = \dot{x}(t) = i \cdot \omega_0 \cdot (A \cdot e^{i \omega_0 \cdot t} - B \cdot e^{-i \omega_0 \cdot t})$$

Kui kasutame järgmised algtingimused $x(t=0)=x_0$ ja $v(t=0)=0$ siis saime A ja B parameetrite väärtused:

$$v(0) = i \cdot \omega_0 \cdot (A - B) = 0 \Rightarrow A = B \Rightarrow x(0) = 2 \cdot A = x_0 \Rightarrow x(t) = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

Ja lõpptulemus siis: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$, siin x_0 - võnkumise amplituud (maksimaalne hälve tasakaaluasendist), ω_0 - võnkumise ringsagedus. Võnkumise period arvutatakse otse valemiga $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Nuumbriline lahend.

Liikumise võrrandi $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ integreerimiseks rakendame standardse programmi rkf45 ja ode45. Selle jaoks peame esitada teist järku diferentsiaalvõrrandi esimest järku võrrandite süsteemiks:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x = v \\ \dot{v}_x &= -\omega_0^2 \cdot x \end{aligned} \quad \text{algtingimustega} \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = 0.$$

Eneefgiate arvutamiseks saab kasutada järgmised hästi teatud valemid $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}, E_{pot} = \frac{k \cdot \Delta x^2}{2} = \frac{k \cdot x^2}{2}$ ja koguenergia $E_{kogu} = E_{kin} + E_{pot} = \text{const.}$

10.1.1.2. Sumbuvad võnkumised

Sumbuvad võnkumised tekivad siis, kui võnkuv keha kaotab energiat, kuna kehale mõjub väline takistusjõud. Kui keha kiirus ei ole suur siis takistise jõud on võrdeline keha kiirusega $\vec{F}_{tak} = -\alpha \cdot \vec{v}$. Liikumise võrrand siis nii välja näeb: $\ddot{x} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$, $\beta = \frac{\alpha}{2 \cdot m}$. Kui esitada lahendit vormis $x(t) = e^{\lambda \cdot t}$ siis analüütiline koordinaati sõltuvus ajast välja näeb nii:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \text{ siin } \omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}, \omega_0 = \frac{k}{m}, \varphi_0 - \text{nii nimetatakse algfaas.}$$

Nuumbriline lahendus alustame sellest et esitada teist järku diferentsiaalvõrrandi esimest järku võrrandite süsteemiks:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= -2 \cdot \beta \cdot \dot{x} - k \cdot x \end{aligned}$$

Algtingimused võtame samad: $x(0) = x_0, \quad v(0) = 0.$

10.1.1.3. Sundvõnkumised

Sundvõnkumised tekivad siis, kui vinkuv kehale mõjub väline perioodiline jõud. Kui keha kiirus ei ole suur siis takistise jõud on võrdeline keha kiirusega $\vec{F}_{tak} = -\alpha \cdot \vec{v}$ ja perioodiline väline jõud $\vec{F}_v = \vec{F} \cdot \cos(\omega_v \cdot t)$. Liikumise võrrand siis: $\ddot{x} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega_v \cdot t)$, $\beta = \frac{\alpha}{2 \cdot m}, F_0$ - välise jõu amplituud ja ω_v - sagedus.

Nuumbriline lahendus alustame sellest et esitada teist järku diferentsiaalvõrrandi esimest järku võrrandite süsteemiks:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= -2 \cdot \beta \cdot \dot{x} - k \cdot x + F_v \cdot \cos(\omega_v \cdot t) \end{aligned}$$

Algtingimused nagu eelmises punktis: $x(0) = x_0, \quad v(0) = 0.$

10.1.2 Matemaatiline pendel

Matemaatiline pendel (joonis 2) see on idealiseeritud süsteem mis koosneb kaalutust ja venimatust niidist pikkusega R , mille otsas ripub ainepunkt massiga m . Kehale mõjub raskusjõud ja tõmbejõud niidi poolt. Keha liigub ringil (trajektoor on ringjoon). Liikumise võrrandi saab otse kirjutada:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = m \vec{g} + \vec{T}$$

Nagu tavaliselt, kasutame vektorite asemel projektsioone:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -T \cdot \cos(\varphi) \\ \ddot{y} &= mg - T \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Nagu diferentsiaalvõrrandite integreerimisest näha, saame keha x ja y koordinaadid - kaks parameetrit. Aga tegelikult ajast sõltub alles nurk $\varphi(t)$. See tähendab et kahe võrrandi asemel saab kasutada ühe. Selle jaoks on vaja kirjutada liikumise võrrandi (Newtoni teine seadus) aga pöördliikumise jaoks. Analoogiline valem siis välja näeb:

$$J \ddot{\varepsilon} = \dot{M}$$

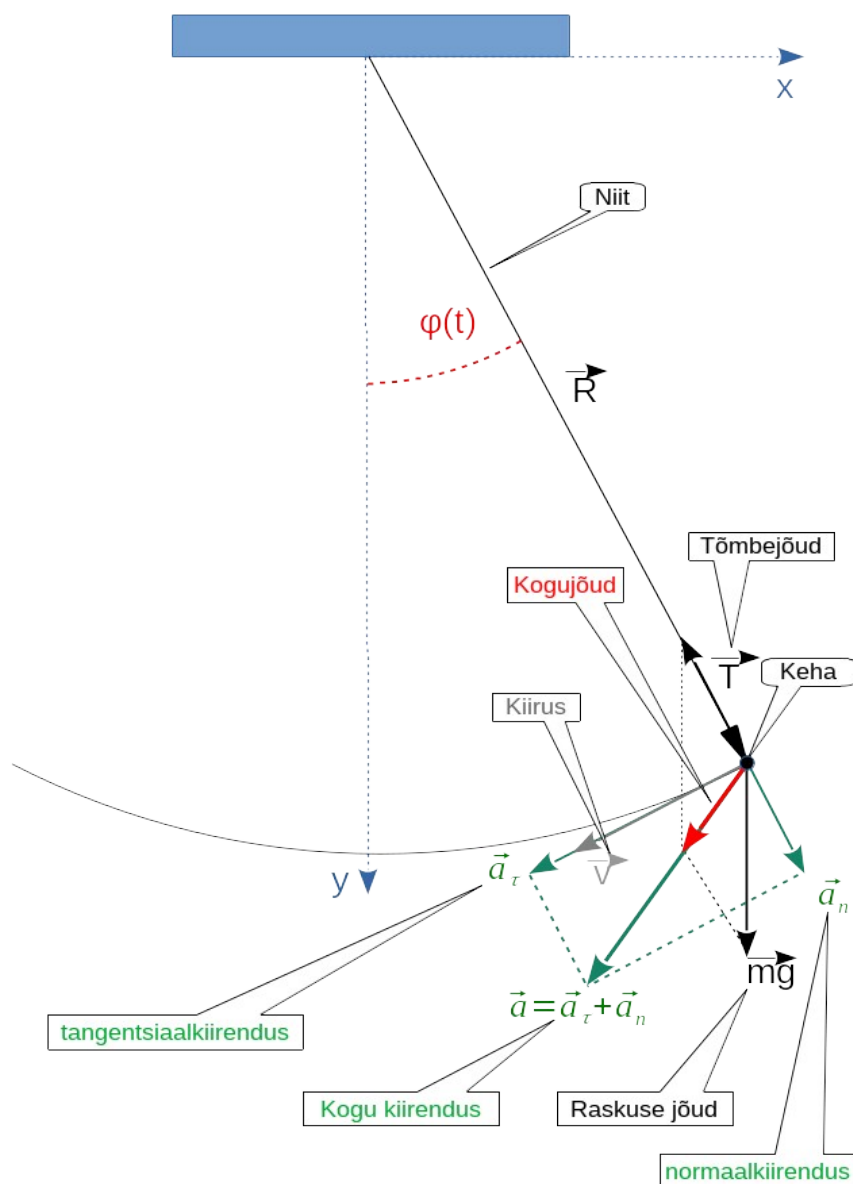
siin J – keha inertsimoment $= m R^2$, ε – nurkkiirendus, seotud nurkkiirusega ω ja nurgaväärtusega φ nii: $\ddot{\varepsilon} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, M – jõumoment (pöördemoment). $M = R F \sin(\alpha)$, α – R ja F vektorite vaheline nurga väärtus.

Kombeneerime kõik valemid siis saame liikumisevõrrandi:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{R} \sin(\varphi) \quad \text{kui asendame} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{R} \\ \text{siis} \quad \ddot{\varphi} &= -\omega_0^2 \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Nüüd esitame teist järku diferentsiaalvõrrandi esimest järgu võrrandite süsteemiks:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\omega_0^2 \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$



Joonis 2

Vajalike programmid leiate kataloogidest Fortran ja Matlab.

http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPM/Loengud/nadal_10/

Fortran/math__sumb.f90
Fortran/plot_vedru.m
Fortran/srkf45.for
Fortran/vedru_sumb.f90

Matlab/vedru/vedru.m
Matlab/vedru/mharm.m
Matlab/vedru/harmf.m
Matlab/math/mharm.m
Matlab/math/math.m
Matlab/math/harmf.m

10.3 Ülesanded:

1. Harmoonilise ostsillaatori summutatud võnkumised. Võtke programmi koodist mudeli parameetrid ja algtingimused.

a) Joonistage kuidas potentsiaalse energia, kineetiline energia ja koguenergia sõltuvad ajast. Miks?

b) Mis toimub kui takistusjõud ei mõjuta kehale (panke parameeter alpha nulli)? Miks?

c) Kuidas arvutatakse programmis takistusjõu töö?

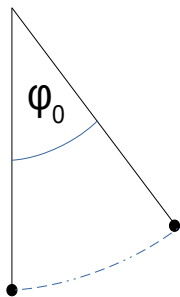
d) Mida tähendavad parameetrid **etot** ja **ecorr** fortrani programmis? Selge et see on kogu mehaaniline energia. Aga mis vahe nende vahel? Miks $etot = ecorr$ kui $\alpha = 0$?

2. Matemaatiline pendel. Kuidas sõltub matemaatilise pendli võnkeperiood algnurga väärtusest? Miks? Ta ei tohi sõltuda!? Paradoks? (vt. joonist 3)

Üllatus! Matemaatilise pendli liikumise kirjeldamiseks kirjutage oma Fortrani ja Pythoni programmid. Eeldame et takistusjõud on null. Differentsiaal võrrandid on sellised:

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\omega_0^2 \cdot \sin(\varphi)$$



Joonis 3