

6. Satelliidi vabaliikumine Maa gravitatsiooniväljas (Kepleri ülesanne).

6.1 Teoreetilised alused

Modelleerime keha liikumist ümber Maakeras esimese kosmilise kiirusega. Selle jaoks on vaja arvutada järgmised parameetrid:

- 1). Kuidas keha koordinaat $x(t)$, $y(t)$ ja kiiruse projektsioonid $v_x(t)$, $v_y(t)$ sõltuvad ajast.
- 2). Kineetilise, potentsiaalse ja kogu energiad erinevates aja momentides.

Eeldame et kehale mõjub ainult gravitatsiooni jõud:

Gravitatsiooni jõud (Newtoni gravitatsiooni seadus) (joonis 1)

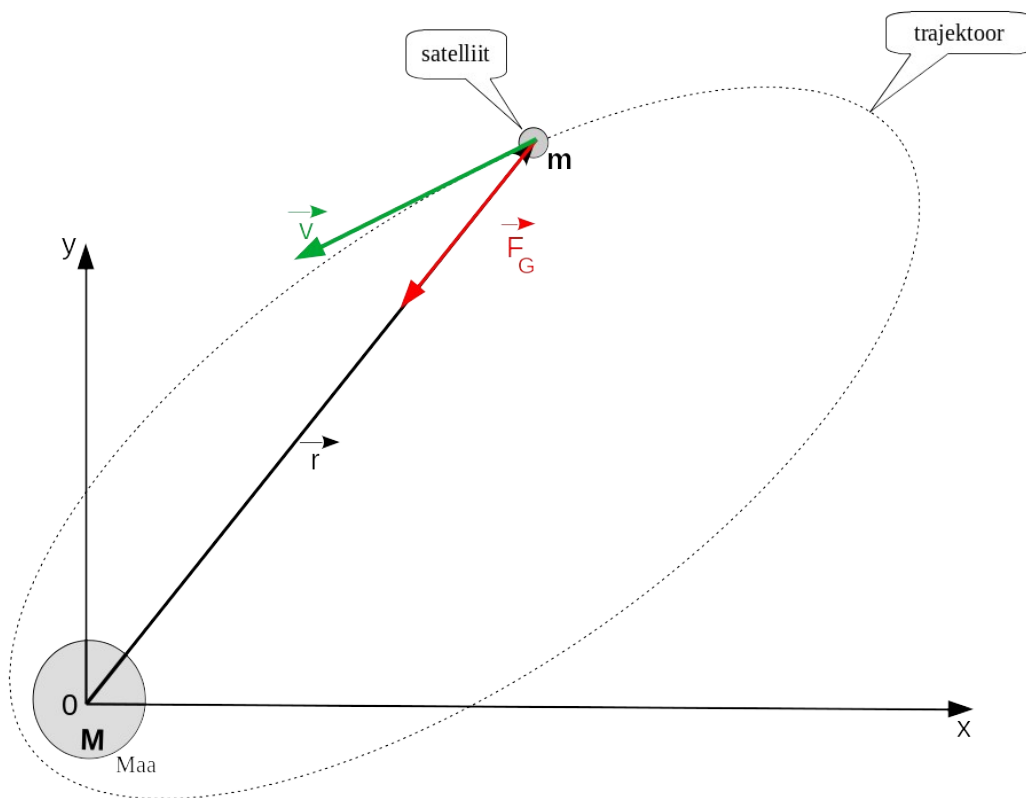
$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^3} \cdot \vec{r} \quad \text{ja potentsiaalne energia arvutatakse järgmise valemiga:} \quad U_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r} .$$

siin

$G=6.67408 \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ -gravitatsiooni konstant,

$M=5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ - Maa mass,

$R_M=6378 \text{ km}$ - Maa keskmine raadius.



Joonis 1

Selles lähenduses g -raskuskiirendus sõltub trajektoori kõrgusest (täpne valem):

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^3} \cdot (\vec{R}_M + h) \quad \text{või absoluutne väärtus} \quad g(h) = G \cdot \frac{M}{(R_M + h)^2} \quad .$$

Nüüd arvutame keha koordinaadi ja kiiruse aja sõltuvuse. Selle jaoks on vaja lahendada diferentsiaalvõrrandi (või diferentsiaalvõrrandite süsteemi) mille annab Newtoni teine seadus (see on nii nimetatakse keha liikumisevõrrand).

$$\vec{a} = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Nagu eelmises ülesannes, mugavam kasutada vektorite asemel nende projektsioonid. Projekteerime kõik vektorid x ja y-telgidel. Projekteerime kõik vektorid x ja y-telgedel. Kui koordinaadi teljed ja nulli punkt on valitud nagu joonisel siis: me saame kaks diferentsiaalvõrrandi:

$$\ddot{x} = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot x \quad \ddot{y} = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot y \quad \text{siin} \quad r^3 = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)^3} \quad .$$

Võrreldes eelmiste ülesannetega raskuskiirenduse arvutamiseks me peame kasutada täpned valemid võetud Newtoni gravitatsiooni seadusest.

Nüüd vaja määrata vajalike parameetrid :

$$R_{\text{maa}} = 6378 \text{ km}$$

$$M_{\text{maa}} = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$G = 6.67408 \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

Võttes arvesse et $v_x = \dot{x}, a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ ja $v_y = \dot{y}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$ siis teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi asemel me peame lahendada esimest järku nelja võrrandi süsteemi.

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_x = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot x$$

$$\dot{v}_y = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot y$$

Antud dif. võrrandite süsteemi lahendamiseks saab kasutada modifitseeritud Euleri algoritm või standartseid programmeid rkf45, ode45 või mingeid teiseid programmeid mis saab leida saidil netlib.org.

Keha koordinaadi ja kiiruste väärtuste järgmisel ajahetkel $t + \Delta t$ arvutatakse järelilikult:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \cdot \Delta t + \frac{a_x(t) \cdot \Delta t^2}{2}$$

$$y(t+\Delta t)=y(t)+v_y(t)\cdot\Delta t+\frac{a_y(t)\cdot\Delta t^2}{2}$$

ja kiiruse projektsioonid:

$$v_x(t+\Delta t)=v_x(t)+a_x(t)\cdot\Delta t$$

$$v_y(t+\Delta t)=v_y(t)+a_y(t)\cdot\Delta t$$

siin Δt on integreerimise ajasamm (mida vähem, seda parem).

Selge et antud algorimi kasutamiseks me peame teada koordinaadi ja kiiruse väärtuste alg ajahetkel $x(t=0)$, $y(t=0)$ ja $v_x(t=0)$, $v_y(t=0)$. Kiirenduse arvutame üleval kirjutatud valemitega.

Kõik pikkused ja kaugused meie ülesannes mõõdetatakse meetrites. Aga Maa kera radius metrites võrdub 6378000 m, see on liiga suur arv. Kas on võimalik kasutada kilometrit metrile asemel ja mida siis on vaja muuta meie võrrandites?

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot x \quad \dot{v}_y = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot y \quad \text{ja} \quad r^3 = (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

1). Võrrandis $\dot{x}=v_x$ koordinaat mõõdetatakse metrites ja kiirus m/s. Aga selle asemel ma tahaks kasutada km ja km/s, kuidas seda saab teha (asi on selles see vähendab ümmardamise vigu). Selle jaoks jagame ja korrutame antud võrrandi tuhandega $\frac{\dot{x}}{1000} = \frac{v_x}{1000}$. Ja sisendame uue koordinaadi $\frac{x}{1000} \rightarrow x$ ja kiiruse $\frac{v_x}{1000} \rightarrow v_x$ väärtuste. Uued parameetrid mõõdetatakse **kilomeetrites** ja **kilomeetrites/sekundis**. See tähendab et esimestes võrrandites üldse ei ole vaja midagi muuta, me võime otse kasutada kilomeetrid metrile asemel.

2). Teistes võrrandites $\dot{v}_x = -G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot x$ teeme samamoodi. Jälle kasutame uued koordinaadid ja kiirused

$$\frac{v_x}{1000} \rightarrow v_x \quad \text{ja} \quad \frac{r}{1000} \rightarrow r \quad \text{siis:}$$

$$\frac{\dot{v}_x}{1000} = -\frac{G \cdot M}{\left(\frac{1000 \cdot r}{1000}\right)^3} \cdot \frac{x}{1000}$$

lihtsustame, siis

$$\frac{\dot{v}_x}{1000} = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{\left(\frac{r}{1000}\right)^3} \cdot \frac{x}{1000} \quad \text{ja siis} \quad \dot{v}_x = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r^3} \cdot x \quad .$$

Siis uus, muudetud (modifitseeritud) difvõrrandite süsteem välja näeb järgmiselt:

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_x = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r^3} \cdot x$$

$$\dot{v}_y = -\frac{G \cdot M \cdot 10^{-9}}{r^3} \cdot y \quad \text{ja} \quad r^3 = (v_x^2 + v_y^2)^3$$

Tuletan meelde et viimastes võrrandites koordinaadid mõõdetakse kilomeetrites ja kiirused kilomeetrites sekundi kohta !

6.2 Kood

Nüüd proovime realiseerida meie planni Fortrani ja Matlabi koodides ja kasutame differentiaalvõrrandite integreerimiseks standartset programmid (rkf45).

RKF45 alamprogrammi parameetrite kirjeldus:

rkf45(f,neqn,y,t,tout,relerr,abserr,iflag,work,iwork)

- f** – Alamprogrammi nime tuletiste arvutamiseks, meie puhul $\dot{x}$ ja $\dot{v}_x$. Teiste sõnadega siin me peame realiseerida üleval kirjutatud diferentsiaalvõrrandid
- neqn** – Võrrandite arv, meie juhul see on 2.
- y** – Ühemõõtmeline massiiv pikkusega “neqn”, meie juhul see on 4.
Fortrani koodis see masiiv kirejeldatakse nii: **real y(4)**.
Samal ajal massiiv y(4) kasutatakse arvutatud parameetrite väärtuste salvestamiseks, meie juhul koordinaadi ja kiiruse väärtused. Lepime kokku et hoiame koordinaadi väärtuse massiivis esimesel kohal ja kiirust teisel kohal. Teist sõnaga y(1)=x, y(2)=y ja y(3)=V_x, y(4)=V_y.
- t** – ajaväärtus antud ajahetkel
- tout** – ajaväärtus järgmisel ajahetkel **tout=t+dt**, siin **dt** - ajasamm
- relerr** - suhtlline viga
- abserr** - absoluutne viga
- iflag** - kasutatakse arvutamise protsessi juhtimiseks (algne väärtus on 1)
- work** - reaali töömassiiv pikkusega 6*neqn+3, meie juhul 27.
- iwork** - täisarvuline töömassiiv fikseeritud pikusega 5.

Programmid leiate kataloogidest Fortran ja Python.

http://parsek.yf.ttu.ee/~physics/FPM/Loengud/nadal_6/ Fortran/kepler_rkf45_sat.f90

Fortran/plot_kepler.m

Fortran/plot_kepler_vectors.m

Matlab/kepler.m

6.3 Ülesanded:

1. Eeldame et et satelliit hakkab liikuda järgmiste algtingimustega:

$x=6578\text{km}$ (asub kõrgusel 200 km)

$y=0\text{ km}$

$V_x(0)= 0.$

$V_y(0)= 7,8\text{ km/s}$ (esimene kosmiline kiirus Maapinnal)

a) Kus kohas asub kõige kaugem trajektoori punkt (Maapinnast)?

b) Mis kiirusega ja kiirendusega satelliit liigub antud punktis?

2. Eeldame et et satelliit hakkab liikuda järgmiste algtingimustega:

$x=6378\text{km}$ (asub kõrgusel 0 km)

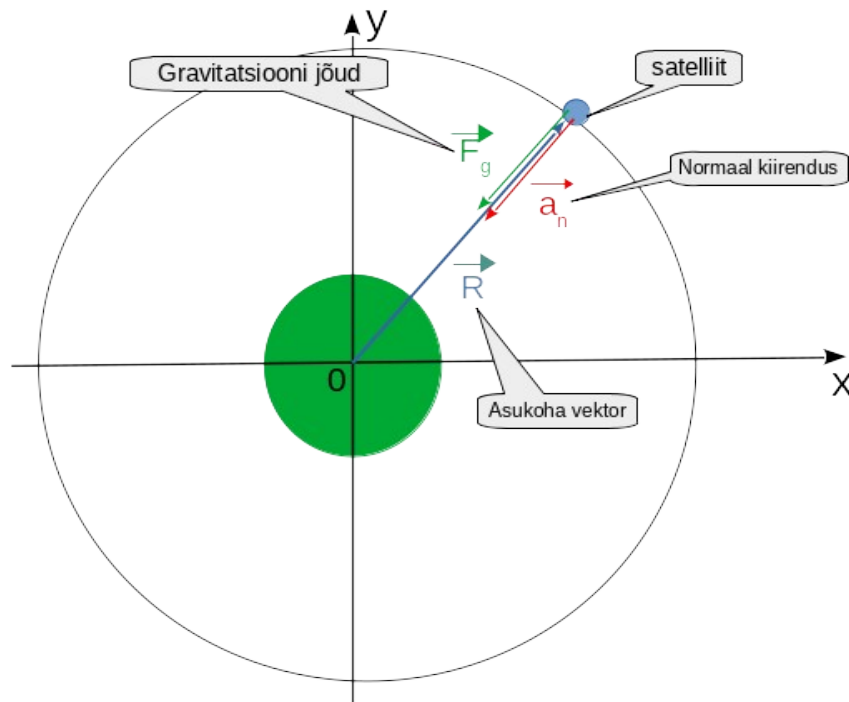
$y=0\text{ km}$

$V_x= 8.$

$V_y= 0\text{ km/s}$

Mis toimub sel juhul?

Lisa 1. Kosmilised kiirused



Esimene kosmiline kiirus on vähim kiirus, mille peab omandama lendav keha, et jõuda jäädavalt ringikujulisele orbiidile ümber planeedi, mille pinnalt ta oma lennuteekonda alustas.

Teise Newtoni seadusi saab kujutada järgmist:

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{a}_n \quad \text{või} \quad G \cdot \frac{m \cdot M_{maa}}{R^3} \cdot \vec{R} = m \cdot \vec{a}_n \quad .$$

Kii kasutame vektorite moodulid, siis:

$$G \cdot \frac{M_{maa}}{R^2} = a_n = \frac{v^2}{R} \quad \text{avaldame kiirust, siis:} \quad V_I = \sqrt{\frac{G \cdot M_{maa}}{(R_{maa} + h)}} \quad \text{siin } h - \text{kõrgus ja Maapinnal}$$

võrdub 7,9 km/s.

Lisa 2.

Teine kosmiline kiirus on vajalik satelliidi külgetõmbejõu piirkonnast lahkumiseks.

Teise kosmilise kiiruse arvutamiseks kasutame energia jäävuse seadust. Eeldame, et kosmoselaev on algselt kõrgusel **h** ja liigub teise kosmilise kiirusega. Siis kogu mehaaniline energia arvutatakse järgmiselt:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m \cdot v_{II}^2}{2} - G \cdot \frac{m \cdot M_{maa}}{R}$$

Lõpmatus ($R \rightarrow \infty$) potentsiaalne ja kineetiline energiad on nullid (kui algkiirus on täpne teine kosmiline kiirus). Siis saab otse saada valemit teise kosmilise kiiruse arvutamiseks:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{maa}}{(R_{maa} + h)}}$$

Nägu näete $V_{II} = \sqrt{2} \cdot V_I$. Ja Maapinnal võrdub 11,2 km/s.